<u>Correction des exercices type bac sur l'orthogonalité.</u>

<u>Exercice 1</u> **1.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (par exemple, $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{3}$) donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2a. Le plan (ABC) peut être définit par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il suffit donc de montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à ces vecteurs. $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 - 2 \times 5 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 1 - 1 \times 3 + 0 \times 5 = 0$.
Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2b. D'après la question précédente, l'équation du plan (ABC) est de la forme $x + 3y + 5z + d = 0$.
Pour déterminer la valeur de d, on peut utiliser le point $A(-2; 0; 2)$:

$$-2 + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$$

Ainsi, on a bien trouvé $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

2c. On reprend l'équation de (ABC) et on y remplace x, y et z par les coordonnées de D :
$0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7 \neq 0$, donc $D \notin (ABC)$.

3a. Une hauteur, c'est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire à la face opposée.
On veut donc savoir si la droite $\mathcal{D}_1$ passe par le point D et si elle est perpendiculaire à (ABC).

• Vérifions si $D(0; 0; 3)$ appartient à $\mathcal{D}_1$: $\begin{cases} 0 = t \\ 0 = 3t \\ 3 = 3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Il n'y a pas de contradiction, donc $D \in \mathcal{D}_1$.

• $\mathcal{D}_1$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, vecteur normal à (ABC) *(ici, ils sont même égaux)*.

Ainsi, $\mathcal{D}_1$ est bien perpendiculaire à (ABC).
On en conclut que la droite $\mathcal{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.

3b. $\mathcal{D}_1$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}_2$ est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\\-6\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles. Si $M(x; y; z)$ est un point d'intersection, alors il existe t et s réels tels que :

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 15s + 8 = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Ainsi, M est le point de $\mathcal{D}_1$ de paramètre $\frac{1}{7}$. $\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3 \times \frac{1}{7} \\ z = 3 + 5 \times \frac{1}{7} \end{cases}$ et $M\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$.

4. a. Pour trouver les coordonnées du projeté orthogonale du point D sur le plan (ABC), on doit s'intéresser à la droite passant par D et perpendiculaire à (ABC). Or on a montré à la question **3a** qu'il s'agissait de $\mathcal{D}_1$.
H est donc le point d'intersection entre $\mathcal{D}_1$ et le plan (ABC). On appelle $H(x; y; z)$ ses coordonnées.

$$x + 3y + 5z - 8 = 0 \Leftrightarrow t + 3 \times 3t + 5(3 + 5t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 35t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5}$$

Ainsi, H est le point de $\mathcal{D}_1$ de paramètre $-\frac{1}{5}$. $\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 3 \times \frac{-1}{5} \\ z = 3 + 5 \times \frac{-1}{5} \end{cases}$ et $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$.

4b. Il s'agit de calculer $HD = \sqrt{\left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}} \approx 1{,}18$.

Exercice 2

1. *Même si on ne vous demande pas de justifier, il faut faire très attention à cette question car presque toutes les questions suivantes dépendent de ces trois points.*

$F(3;0;1)$, $H(0;1;1)$ et $M(1{,}5;1;0)$.

2a. *Si vous ne trouvez pas le bon résultat à cette question, c'est généralement qu'il faut vérifier votre réponse à la question 1.*

Il s'agit de montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan,

par exemple $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}-1{,}5\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{FH} = 2\times(-3)+6\times1+3\times0 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{FM} = 2\times(-1{,}5)+6\times1+3\times(-1) = 0$.

Ainsi, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

2b. Le plan (HMF) a donc une équation de la forme $2x+6y+3z+d=0$.

Or $H(0;1;1)$ appartient à ce plan, donc $2\times0+6\times1+3\times1+d=0 \Leftrightarrow 9+d=0 \Leftrightarrow d=-9$.

L'équation du plan est donc $2x+6y+3z-9=0$.

2c. Le plan $\mathcal{P}$ admet $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, mais ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$, vecteur normal au plan (HMF) (par exemple, $\frac{5}{2}\neq\frac{-3}{3}$). Donc $\mathcal{P}$ n'est pas parallèle au plan (HMF).

3. La droite (DG) passe par le point $D(0;1;0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Elle admet donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

4. $N(x;y;z)$ existe bien car les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux. Il existe donc un réel t tel que $2x+6y+3z-9=0 \Leftrightarrow 2\times3t+6\times1+3\times t-9=0 \Leftrightarrow 9t-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

Ainsi, N est le point de (DG) de paramètre $\frac{1}{3}$. $\begin{cases}x=3\times\frac{1}{3}\\y=1\\z=\frac{1}{3}\end{cases}$ et $N\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$.

5. On peut retrouver le projeté orthogonal nous-mêmes comme vu en leçon et vérifier s'il s'agit bien de R.

Mais une autre méthode peut consister à vérifier que R appartient bien à (HMF), et que le vecteur $\overrightarrow{RG}$ est orthogonal au plan (HMF).

- $2\times3+6\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-9=6+1{,}5+1{,}5-9=0$ donc $R\in(HMF)$.
- Mais on a $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$, vecteur normal au plan (HMF).

Donc $\overrightarrow{RG}$ n'est pas orthogonal au plan (HMF).

Ainsi, R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

Exercice 3

Affirmation 1

Il existe deux méthodes :

• vérifier que les trois points A, C et D appartiennent bien au plan (P),

• choisir deux vecteurs définissant le plan, par exemple $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, vérifier qu'ils sont bien orthogonaux au vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$, et enfin déterminer la valeur de d dans l'équation $8x-5y+4z+d=0$.

La première méthode est largement plus rapide.

$8\times 2-5\times 0+4\times 0-16=0$ donc $A\in(P)$.

$8\times 4-5\times 4+4\times 1-16=0$ donc $C\in(P)$.

$8\times 0-5\times 0+4\times 4-16=0$ donc $D\in(P)$.

Ainsi, les trois points A, C et D définissent bien le plan (P) d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2

Comme les points A, C et D définissent le plan (P) d'équation $8x-5y+4z-16=0$, il suffit de vérifier si B appartient à ce plan (P).

$8\times 0-5\times 4+4\times 3-16=-24$ donc $B\notin(P)$. L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3

(AC) passe par $A(2;0;0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$. Sa représentation paramétrique est $\begin{cases}x=2+2t\\y=4t\\z=t\end{cases}$

(BH) passe par $B(0;4;3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Sa représentation paramétrique est $\begin{cases}x=-s\\y=4-3s\\z=3-s\end{cases}$

Les deux vecteurs directeurs de ces droites ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Soit M un éventuel point d'intersection, il existe alors t et s tels que :

$$\begin{cases}2+2t=-s\\4t=4-3s\\t=3-s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+2(3-s)=-s\\4(3-s)=4-3s\\t=3-s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8-2s=-s\\12-4s=4-3s\\t=3-s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=8\\s=8\\t=3-8=-5\end{cases}$$

Ainsi, M est le point de (BH) de paramètre 8. $\begin{cases}x=-8\\y=4-3\times 8\\z=3-8\end{cases}$ et $M(-8;-20;-5)$.

Les droites sont sécantes, l'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

On peut retrouver le projeté orthogonal nous-mêmes comme vu en leçon et vérifier s'il s'agit bien de H. Mais une autre méthode peut consister à vérifier que H appartient bien à (ABC), et que le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au plan (ABC).

• $-1-1+2\times 2-2=0$ donc $H\in(ABC)$.

• Le vecteur $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, vecteur normal au plan (ABC).

Donc $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au plan (ABC).

Ainsi, H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 4 **1.** La vitesse des deux avions étant la même, il s'agit juste de montrer que les distances BC et OA sont égales. $OA = 200$ mètres au vu des coordonnées de O et A.

$BC = \sqrt{(87-(-33))^2 + (75-75)^2 + (-116-44)^2} = \sqrt{120^2 + (-160)^2} = 200$ mètres également.

2. La droite (OA) passe par O et est dirigée par $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\200\\0\end{pmatrix}$, elle admet pour représentation : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 200t \\ z = 0 \end{cases}$

La droite (BC) passe par B et est dirigée par $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}120\\0\\-160\end{pmatrix}$, elle admet pour représentation : $\begin{cases} x = -33 + 120s \\ y = 75 \\ z = 44 - 160s \end{cases}$

Il est possible de prendre des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ beaucoup plus simples à manipuler, par exemple $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$. Soit $M(x;y;z)$ un éventuel point d'intersection, il existe alors t et s réels tels que :

$$\begin{cases} 0 = -33 + 120s \\ 200t = 75 \\ 0 = 44 - 160s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0{,}275 \\ t = 0{,}375 \\ s = 0{,}275 \end{cases}$$

On n'aboutit pas à une contradiction, donc les trajectoires se croisent.

3. En revanche, les avions ne vont normalement pas se percuter car le paramètre des points d'intersection est différent. La longueur de la trajectoire étant de 200 mètres et la différence de paramètre de 0,1, ils seront donc à une distance de 20 mètres.

Exercice 5 **1.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2a. On n'a ni vecteur normal, ni équation du plan. Il s'agit d'exprimer $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Soient a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a - 3b \\ 4 = 4b \\ -3 = -a + b \end{cases}$

On trouve $b = 1$ puis $a = 4$, donc $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et D sont coplanaires.

2b. Il s'agit juste de montrer que $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ sont bien colinéaires.

3a. $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

3b. L'équation est donc de la forme $2x + y + 2z + d = 0$, et le point A nous permet d'obtenir $d = -7$.
Donc l'équation du plan est $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3c. Δ passe par $S(2;1;4)$ et est orthogonale à (ABC), donc dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. On trouve donc $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$.

3d. On vérifie que le point I fourni appartient bien à la fois à Δ et au plan (ABC). On calcule $SI = 2\ cm$.

4a. On vérifie que H appartient bien à la droite (CD) et que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont bien orthogonaux.
On calcule $HB = 3\sqrt{2}\ cm$.

4b. D'après la formule, il faut donc calculer $\frac{AB+CD}{2} \times HB$

Or on trouve $AB = \sqrt{2}$ et $CD = 4\sqrt{2}$, donc l'aire est :

$$\frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 5 \times 3 = 15\ \text{cm}^2$$

5. On connait l'aire de la base (question **4b**) et la hauteur de la pyramide (SI, question **3d**).
On applique donc la formule : $\frac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10\ \text{cm}^3$

Exercice 6

1. a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BD}$ d'après la question précédente.

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire, $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$

Or $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ car les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré $ABCD$ sont perpendiculaires,

et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=0$ car la droite (AE) est orthogonale à la face (ABC) du carré, qui inclut le segment $[BD]$.

Ainsi, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0$.

c. *(On l'admet, mais en fait ça se démontre de la même manière)*

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{BE}$, et aussi à $\overrightarrow{BD}$ d'après **1b.**

Ainsi, le vecteur directeur de (AG) est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ qui définissent le plan (BDE).

Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) d'après **1c.**

Or $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1;1;1)$.

Ainsi, le plan (BDE) admet une équation cartésienne de la forme $1x+1y+1z+d=0$ avec d réel, soit $x+y+z+d=0$.

Or ce plan passe par $B(1;0;0)$ donc $1+0+0+d=0$ et ainsi $d=-1$.

Le plan (BDE) admet donc pour équation cartésienne $x+y+z-1=0$.

b. (AG) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ et passe par $A(0;0;0)$ donc admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$

Ainsi, on résout le système d'équations $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\\x+y+z-1=0\end{cases}$

La dernière équation implique $t+t+t-1=0$ soit $t=\dfrac{1}{3}$

Ainsi, les coordonnées de K sont $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

c. K est en fait le projeté orthogonal de G sur le plan (BDE). Ainsi, la distance GK est la hauteur de la pyramide $BDEG$ de base BDE.

On connait déjà l'aire de BDE. La distance GK se calcule ainsi :

$$GK=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$V=\frac{A_{base}\times h}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}}{3}=\frac{1}{3}$$

<u>Exercice 7</u> Notez que la consigne ne demande pas de justifier. Les réponses de ce corrigé sont détaillées pour vous permettre de comprendre la démarche de réflexion, et correspond à ce que vous pourriez écrire au brouillon.

1. P a donc pour vecteur normal $(3;2;9)$ et la droite d a pour vecteur directeur $(4;-1;-1)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc P et d ne sont pas orthogonaux, l'affirmation B est fausse.
Ils ne sont pas non plus orthogonaux (le produit scalaire donne 1), donc P et d ne sont pas parallèles ou confondus. L'affirmation C est fausse aussi.
Il nous reste à trouver le point d'intersection. Comme on est dans un QCM, on ne résout surtout pas le système, <u>il suffit juste de remplacer les coordonnées des points proposés dans l'équation de P et le système de d</u>, d'autant plus que le système est compliqué à résoudre.
On a $3\times 3+2\times 2+9\times 9-5=9+4+81-5=89\neq 0$ donc le point de l'affirmation A n'appartient même pas à P. L'affirmation D est sans doute vraie, mais vérifions-le.
On a bien $3\times(-353)+2\times 91+9\times 98-5=1059+182+882-5=0$ (si si, faites-moi confiance),
et $\begin{cases}-353=4t+3\\ 91=-t+2\\ 98=-t+9\end{cases}$ est un système compatible, avec $t=-89$ (promis !).
Donc le point de l'**<u>affirmation D</u>** appartient bien à P et à d.

2. Il s'agit de trouver la plus petite longueur AM, où M est un point de la droite d.
C'est-à-dire qu'il s'agit de trouver la distance entre le point A et la droite d, qui est atteinte par le projeté orthogonal de A sur d. La droite d a pour vecteur directeur$\vec{u}\left(1\,;0\,;5\right)$.
On cherche donc le point $M\left(x\,;y\,;z\right)$ appartenant à d tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

$$\Leftrightarrow (x+2)\times 1+(y-1)\times 0+z\times 5=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)+5z=0$$

En utilisant la représentation paramétrique de la droite, on doit avoir :

$$(t+2+2)+5(5t-6)=0 \Leftrightarrow 26t-26=0 \Leftrightarrow t=1$$

Ainsi, M est le point de d de paramètre 1, soit $M(3;2;-1)$.
Ça ne correspond ni à l'affirmation C, ni à l'affirmation D (de toute façon, le point de l'affirmation C n'appartient même pas à d). Calculons la distance AM :

$$AM=\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{25+1+1}=\sqrt{27}$$

C'est donc l'**<u>affirmation B</u>** qui est vraie.

3. Les vecteurs normaux à P et P' sont respectivement $\vec{u}(1;2;-3)$ et $\vec{v}(2;-1;0)$, qui ne sont pas colinéaires, donc P et P' ne sont pas parallèles. Déterminons leur intersection, on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\ 2x-y+2=0\end{cases}$$

On cherche une droite, on peut donc appeler t son paramètre et supposer $x=t$. La deuxième équation devient $2t-y+2=0 \Leftrightarrow y=2t+2$. On réinjecte cela dans la première équation, qui devient :

$$t+2(2t+2)-3z+1=0 \Leftrightarrow 3z=5t+5 \Leftrightarrow z=\frac{5}{3}t+\frac{5}{3}$$

Une représentation paramétrique de la droite d'intersection est donc :

$$\begin{cases}x=t\\ y=2t+2\\ z=\dfrac{5}{3}t+\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

Un vecteur directeur est donc $(1;2;\frac{5}{3})$ (ce qui élimine l'affirmation C) et en multipliant par 3,on trouve $(3;6;5)$ qui correspond à l'affirmation D. Le point D convient bien à la représentation paramétrique pour $t=-1$, c'est donc l'**<u>affirmation D</u>** qui est vraie.

Exercice 8

Exercice un peu long, qui valait 6 points au bac. La partie A repose sur des propriétés de géométrie vues au collège, mais peut-être oubliées… Cela dit, la partie B est indépendante de la partie A !

Partie A

1. Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
(AC) est perpendiculaire à (AB) car le triangle ABC est supposé rectangle en A.
(AC) est orthogonale à (DB), car (DB) (aussi appelée d) est orthogonale au plan P qui inclut (AC).
Ainsi, (AC) est orthogonale à (AB) et à (DB), donc au plan (BAD).
2. En voilà un nom amusant.
- ABC est rectangle en A d'après l'énoncé.
- ABD et BDC sont rectangles en B car la droite (DB) est orthogonale au plan P qui inclut (AB) et (BC).
- D'après la question précédente, (AC) est orthogonale au plan (BAD), donc en particulier à la droite (AD).
Ainsi, ACD est rectangle en A.
$ABCD$ est donc bien un bicoin.
3. a. Comme $[CB]$ est l'hypoténuse de ABC, on en déduit que $\boldsymbol{CB} > AB$ et $\boldsymbol{CB} > AC$.
Mais $[CD]$ est l'hypoténuse de BDC, donc $CD > BD$ et surtout, $CD > \boldsymbol{CB}$.
On a montré pour l'instant que $[CD]$ est plus longue que toutes les autres arêtes, sauf pour l'instant $[AD]$.
Or $[CD]$ est aussi l'hypoténuse de ADC, donc $CD > AD$.
Ainsi, $[CD]$ est la plus longue de toutes les arêtes.
b. Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le centre de son cercle circonscrit,
donc en utilisant le triangle ACD, $IC = ID = IA$,
et en utilisant le triangle DCB, $IC = ID = IB$.
Ainsi, I est bien équidistant des sommets du bicoin.

Partie B

1. Un vecteur normal à P est un vecteur directeur de la droite d, soit par exemple $\vec{n}(2\,;-2\,;1)$.
Le plan P admet donc pour équation $2x - 2y + z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.
Le point A appartient à ce plan, donc $2 \times 3 - 2 \times 1 + (-5) + d = 0 \Leftrightarrow d = -6 + 2 + 5 = 1$
Ainsi, P a pour équation $2x - 2y + z + 1 = 0$.
2. En réinjectant les équations de la représentation paramétrique de d dans l'équation obtenue ci-dessus, on a :

$$2(2t + 1) - 2(-2t + 9) + (t - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Le point B est donc le point de d de paramètre $t = 2$, ce qui donne bien $B(5\,;5\,;-1)$.
3. On calcule $2 \times 7 - 2 \times 3 + (-9) + 1 = 14 - 6 - 9 + 1 = 15 - 15 = 0$ donc $C \in P$.
Maintenant, il faut montrer que ABC est rectangle isocèle, c'est-à-dire calculer AB^2, AC^2 et BC^2 :

$$AB^2 = (5-3)^2 + (5-1)^2 + (-1+5)^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 = 36$$
$$AC^2 = (7-3)^2 + (3-1)^2 + (-9+5)^2 = 4^2 + 2^2 + (-4)^2 = 36$$
$$BC^2 = (7-5)^2 + (3-5)^2 + (-9+1)^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-8)^2 = 72$$

On a bien $BC^2 = AB^2 + AC^2$, et $AB = AC$, donc ABC est rectangle et isocèle en A.
4. *t est différent de 2, car sinon M est confondu avec B.*
a. La droite (AB) est incluse dans le plan P, et M appartient à d qui est orthogonale à P.
Donc ABM est un triangle rectangle en B.

Suite de la correction de l'exercice 8

b. ABM est isocèle en B si et seulement si $BM = AB$, c'est-à-dire $BM^2 = AB^2 = 36$ (d'après **3**). Or :

$$\begin{aligned} BM^2 &= (2t+1-5)^2 + (-2t+9-5)^2 + (t-3+1)^2 \\ &= (2t-4)^2 + (4-2t)^2 + (t-2)^2 \\ &= 4t^2 - 16t + 16 + 16 - 16t + 4t^2 + t^2 - 4t + 4 \\ &= 9t^2 - 36t + 36 \end{aligned}$$

Ainsi, $BM^2 = 36 \Leftrightarrow 9t^2 - 36t + 36 = 36 \Leftrightarrow 9t^2 - 36t = 0$
et en simplifiant par 9, on trouve bien $t^2 - 4t = 0$.

c. Les points M_1 et M_2 sont ceux dont les paramètres vérifient l'équation ci-dessus, qui est équivalente à $t(t-4) = 0$. Il s'agit donc des points de la droite d de paramètres $t = 0$ et $t = 4$.
On trouve $M_1(1; 9; -3)$ pour $t = 0$, et $M_2(9; -1; 1)$ pour $t = 4$.

Partie C

C'est le moment de mélanger les résultats des deux parties. Vérifions d'abord que la partie B correspond à la situation décrite en partie A

Le triangle ABC est bien rectangle en A dans un plan P.
La droite d est bien la droite orthogonale à P passant par B.
Le point D est un point de cette droite d, distinct de B.
Ainsi, d'après la question **3b** de la partie A, le point équidistant des sommets du tétraèdre $ABCD$ est le point I, milieu de $[BC]$.
Les coordonnées de I sont donc la moyenne des coordonnées de C et de D, soit $(8; 2; -4)$,
et le rayon est la moitié de la longueur CD.
Or $CD^2 = (9-7)^2 + (1-3)^2 + (1+9)^2 = 2^2 + (-2)^2 + 10^2 = 108$.
Ainsi, le rayon est égal à :

$$\frac{\sqrt{108}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 27}}{2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Exercice 9

1. *Il n'y a pas beaucoup de rapport entre (IN) et (ML), mais on peut carrément montrer que (IN) est orthogonale au plan (LMK), ce qui impliquera qu'elle sera orthogonale à (ML). Cette démonstration doit uniquement reposer sur des considérations géométriques. Il y a plusieurs façons d'y arriver.*
Par symétrie de la figure considérée, la pyramide $NJKLM$ est une pyramide régulière. La droite (IN) est donc une hauteur de cette pyramide, donc orthogonale à la base de cette pyramide, le quadrilatère (LKM).
(IN) est donc orthogonale au plan (LMK), donc à la droite (LM) qui en fait partie.

2. a. On a $C(1; 1; 0)$ donc $\overrightarrow{NC}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1)$. Ensuite, $M(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$ et $L(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ donc $\overrightarrow{ML}(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$.

2. b. $\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1 \times 0 = 0$ donc (NC) et (ML) sont otrhogonales.

2. c. On a montré que (ML) est orthogonale à (NC), et elle est aussi orthogonale à (IN) d'après **1**.
Ainsi, (ML) est orthogonale à deux droites sécantes de (NCI), elle est orthogonale à ce plan.
Un vecteur directeur de (ML) est $\overrightarrow{ML}(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, donc (NCI) a pour équation cartésienne :

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + d = 0$$

Déterminons le réel d. C appartient à ce plan, donc $-\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$
Ainsi, l'équation devient : $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$, et en multipliant par (-2), on trouve $x - y = 0$.

<u>Suite de la correction de l'exercice 9</u>

3. a. On a $M(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$ et $J(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ donc $\overrightarrow{MJ}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$. De plus, $M(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$ et $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$ donc $\overrightarrow{MN}(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.
On peut multiplier ces deux vecteurs directeurs par 2 pour obtenir $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(0; 1; 1)$.
Cherchons maintenant un vecteur normal $\vec{n}(x; y; z)$.
On doit avoir $\vec{n}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ et $\vec{n}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow y + z = 0$.
Comme tous les vecteurs normaux sont colinéaires, on peut prendre $x = 1$, donc $y = -1$ et ainsi $z = 1$.
Donc $\vec{n}(1; -1; 1)$. Ainsi, l'équation de (NJM) est de la forme $x - y + z + d = 0$. On trouve ensuite que $d = -1$, grâce par exemple au point N.

b. On a $D(0; 1; 0)$ et $F(1; 0; 1)$ donc $\overrightarrow{DF}(1; -1; 1)$, ce qui correspond à un vecteur normal à (NJM) d'après l'équation cartésienne vue en **3a**.

c. On doit trouver l'intersection de deux plans, ce qui correspond au système :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

On peut prendre $x = t$, on obtient $y = t$ et ainsi $z = 1$, soit la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$

Elle passe par le point N qui appartient évidemment aux deux plans (NJM) et (NCI), et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$. Elle passe également par $E(0; 0; 1)$ en prenant $t = 0$, donc d correspond à la droite (NE) (ou (EG), d'ailleurs).