Exercices type bac sur l'orthogonalité.

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère :

• les points $A(-2;0;2)$, $B(-1;3;0)$, $C(1;-1;2)$ et $D(0;0;3)$.

• la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

• la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+3s \\ y = -1-5s \\ z = 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+3y+5z-8=0$.

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. a. Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.

On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.

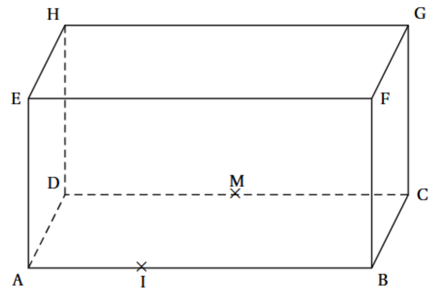
b. Démontrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*

Exercice 2

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB=3$ et $AD=AE=1$ représenté ci-contre. On considère le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment [CD].



On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est : $2x+6y+3z-9=0$.

c. Le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $5x+15y-3z+7=0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. Soit N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF). Déterminer les coordonnées de N.

5. Le point $R(3;\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ de coordonnées est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier.

Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$A(2;0;0)$, $B(0;4;3)$, $C(4;4;1)$, $D(0;0;4)$ et $H(-1;1;2)$.

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan (P) d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

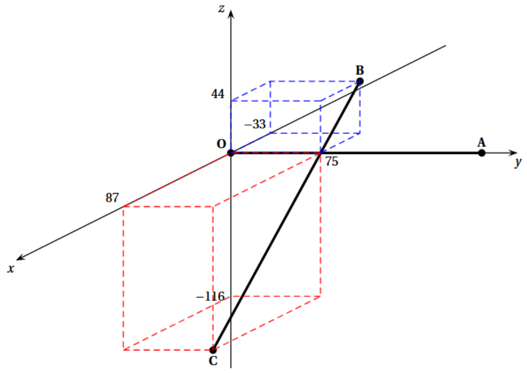
Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Exercice 4



On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

• on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, une unité représentant un mètre ;

• l'avion n°1 doit relier le point O au point $A(0; 200; 0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de 200 m/s ;

• l'avion n°2 doit, quant à lui, relier le point $B(-33; 75; 44)$ au point $C(87; 75; -116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de 200 m/s.

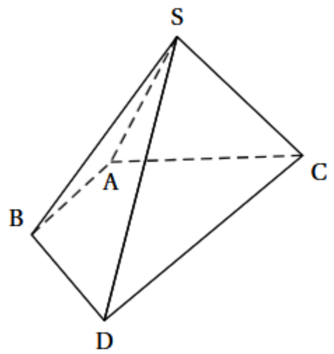
• au même instant, l'avion n°1 est au point O et l'avion n°2 est au point B.

1. Justifier que l'avion n°2 mettra autant de temps à parcourir le segment $[BC]$ que l'avion n°1 à parcourir le segment $[OA]$.

2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.

3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?

Exercice 5



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(3; -1; 1)$, $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$, $D(4; 3; -2)$ et $S(2; 1; 4)$.

Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

b. Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.

4. a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3; 3; -1)$ et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.

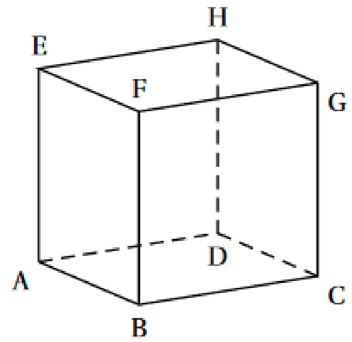
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule $A = \frac{b+B}{2} \times h$ où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times aire\ de\ la\ base \times hauteur$.

Exercice 6

On considère un cube ABCDEFGH.



1. **a.** Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

   c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

Exercice 7

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Il est attribué un point si la lettre correspond à l'affirmation exacte, 0 sinon.

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace.
Les quatre questions sont indépendantes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. On considère le plan P d' équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4t+3 \\ y & = & -t+2 \\ z & = & -t+9 \end{array}\right.$ $, t \in \mathbb{R}$.

   Affirmation A : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(3 ; 2 ; 9)$.
   Affirmation B : le plan P et la droite d sont orthogonaux.
   Affirmation C : le plan P et la droite d sont parallèles.
   Affirmation D : l'intersection du plan P et de la droite d est réduite au point de coordonnées $(-353 ; 91 ; 98)$.

2. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t+2 \\ y & = & 2 \\ z & = & 5t-6 \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $A(-2 ; 1 ; 0)$. Soit M un point variable de la droite d.

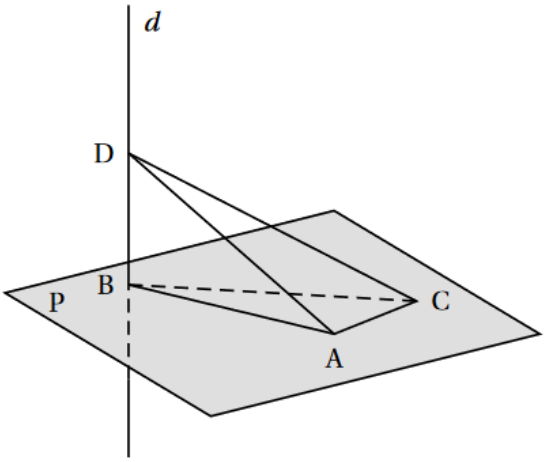
   Affirmation A : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.
   Affirmation B : la plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.
   Affirmation C : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(-2 ; 1 ; 0)$.
   Affirmation D : la plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées $(2 ; 2 ; -6)$.

3. On considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 1 = 0$ et le plan P' d'équation cartésienne $2x - y + 2 = 0$.

   Affirmation A : les plans P et P' sont parallèles.
   Affirmation B : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par les points $A(5 ; 12 ; 10)$ et $B(3 ; 1 ; 2)$.
   Affirmation C : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $C(2 ; 6 ; 5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1 ; 2 ; 2)$.
   Affirmation D : l'intersection des plans P et P' est une droite passant par le point $D(-1 ; 0 ; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(3 ; 6 ; 5)$.

Exercice 8 **Partie A**

Dans un plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan P et passant par le point B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).

On appelle *bicoin* un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoin.
3. **a.** Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du bicoin ABCD.
   b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B

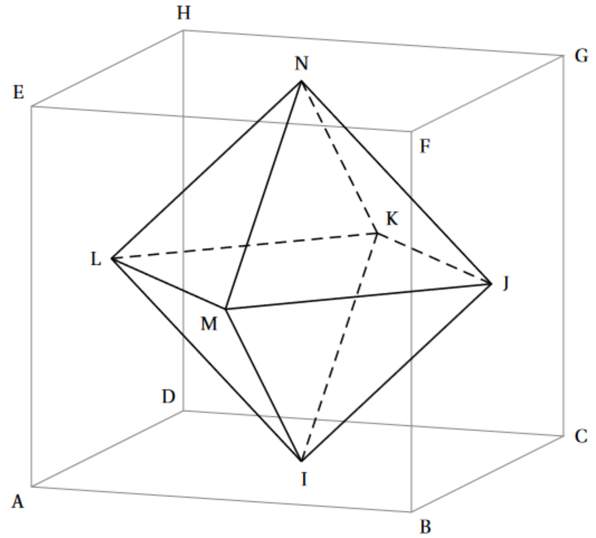
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; −5) et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan P et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; −1),
3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; −9) appartient au plan P puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.
   a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.
   b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.
   c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

On donne le point D(9; 1; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c.** de la partie B. Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties A et B précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

Exercice 9 On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous.



Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AD}\,;\ \overrightarrow{AE}\right)$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\,;\ 1\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.
   b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.
   c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).
3. **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.
   b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.
   c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.