

Correction du devoir surveillé (orthogonalité)

Le barème est établi sur 40 points, puis la notation est ramenée à 20.

Exercice 1 (15 pts)

1. (2 pts) $\overrightarrow{AB}(6; 0; -6)$; $\overrightarrow{AC}(0; 6; -6)$ et $\overrightarrow{BC}(-6; 6; 0)$.

2. (2 pts) La norme de ces trois vecteurs est $\sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{72}$, donc le triangle ABC est équilatéral.

3. (2 pts) On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \times 1 + 0 \times 1 - 6 \times 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times 1 + 6 \times 1 - 6 \times 1 = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , c'est donc un vecteur normal à ce plan.

4. (2 pts) On en déduit que l'équation de (ABC) est de la forme $x + y + z + d = 0$ avec d réel.

Or A appartient à (ABC) , donc $1 - 1 + 4 + d = 0$ soit $d = -4$. L'équation est bien $x + y + z - 4 = 0$.

5a. (2 pts) La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$, et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 1 \times 2 - 1 \times 1 = 2$

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux, donc la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants.

5b. (2 pts) Soit $M(x; y; z)$ le point d'intersection. Il existe alors t réel tel que :

$$t + (2t - 2) + (-t + 8) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Ainsi, M est le point de $\mathcal{D}$ de paramètre $t = 1$, soit $M(-1; -4; 9)$.

6. (3 pts) On résout le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ -x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

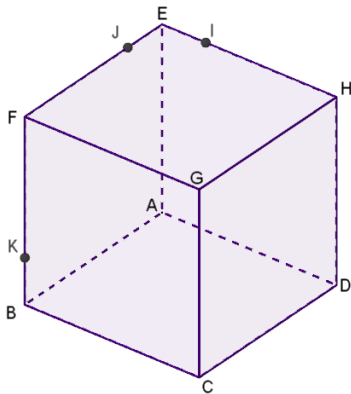
En prenant $x = k$, la deuxième équation fournit $z = 3 + k$

puis la première donne $k + y + 3 + k - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - 2k$.

Ainsi, $\mathcal{D}'$ a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \\ z = 3 + k \end{cases}$$

Exercice 2 (15 pts)

1. (2 pts)



2. (1 pt) $I(0; \frac{1}{4}; 1)$, $J(\frac{1}{4}; 0; 1)$ et $K(1; 0; \frac{1}{4})$

3. (2 pts) On a $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 0)$ et $\overrightarrow{JK}(\frac{3}{4}; 0; -\frac{3}{4})$.

Or $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{JK} = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) .

C'est donc un vecteur normal au plan (IJK) .

4. (3 pts) Ainsi, une équation cartésienne de (IJK) est de la forme $x + y + z + d = 0$.

Avec le point I , on obtient $\frac{1}{4} + 1 + d = 0$ donc $d = -\frac{5}{4}$

L'équation devient $x + y + z - \frac{5}{4} = 0$ soit $4x + 4y + 4z - 5 = 0$ en multipliant par 4.

5. (3 pts) Déterminons d'abord la représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ passant par

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En réinjectant ces équations paramétriques dans l'équation cartésienne de (IJK) ,

on trouve $4t + 4(1 + t) + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow 12t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{12}$

Ainsi, on trouve $M(\frac{1}{12}; \frac{13}{12}; \frac{1}{12})$.

(2 pts) La distance du point D au plan (IJK) est

$$DM = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{12}\right)^2 + \left(1 - \frac{13}{12}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{144} + \frac{1}{144}} = \sqrt{\frac{3}{144}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

6. (2 pts) Utilisons un vecteur normal : N appartient au plan (IJK) si et seulement si, par exemple $\overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

Or $\overrightarrow{JN}(0; 1; -1)$ et $\overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \times 1 + 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$.

Donc les points I, J, K et N sont coplanaires.

Exercice 3 (10 pts)

a. (2 pts) On a $\overrightarrow{AB}(-1; 4; -2)$ et $\overrightarrow{AD}(1; 2; 0)$. Or $-1 \times (-1) = 1$ mais $-2 \times (-1) = 2 \neq 0$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont donc pas colinéaires, ainsi les points A, B et D définissent un plan.

b. (2 pts) On calcule $\overrightarrow{CE}(-2; 1; 3)$.

Or $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times (-1) + 1 \times 4 + 3 \times (-2) = 0$ et $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 0 = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABD) , donc la droite (CE) est orthogonale au plan (ABD) .

c. (3 pts) On vient de montrer que $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal de (ABD) , qui admet une équation cartésienne de la forme : $-2x + y + 3z + d = 0$ avec d réel à déterminer.

En utilisant les coordonnées de A : $-2 \times 1 + (-1) + 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow -2 - 1 + 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Ainsi, une équation cartésienne de (ABD) est $-2x + y + 3z - 6 = 0$.

d. (1 pt) En utilisant le vecteur directeur $\overrightarrow{CE}$ et le point C , on trouve :
$$\begin{cases} x = -2t + 6 \\ y = t - 7 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

e. (2 pts) En réinjectant ces équations paramétriques dans l'équation cartésienne de (ABD) , on trouve :

$$-2(-2t + 6) + (t - 7) + 3(3t - 1) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14t - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

Ainsi, F est le point de (CE) de paramètre $t = 2$, soit $F(2; -5; 5)$.