

Devoir surveillé (orthogonalité)

Exercice 1 (7,5 pts)

On considère les points $A(1; -1; 4)$, $B(7; -1; -2)$ et $C(1; 5; -2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$ est normal au plan (ABC) .
4. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

5. Soit $\mathcal{D}$, la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 8 \end{cases}$$

a. Justifier que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

6. Soit $\mathcal{P}$ le plan admettant pour équation cartésienne $-x + z - 3 = 0$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$, intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC) .

Exercice 2 (7,5 pts)

On considère le cube $ABCDEFGH$ donné en annexe. On donne trois points I, J, K vérifiant :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$$

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1. Sur la **figure donnée en annexe, à rendre avec la copie**, placer I, J et K .
2. Donner sans justification les coordonnées des points I, J, K .
3. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) .
4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
5. Déterminer les coordonnées de M , projeté orthogonal du point D sur le plan (IJK) .

En déduire que la distance du point D au plan (IJK) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

6. Soit $N(\frac{1}{4}; 1; 0)$. Montrer que les points I, J, K et N sont coplanaires.

Exercice 3 (5 pts)

On considère les points de l'espace $A(1; -1; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(6; -7; -1)$, $D(2; 1; 3)$ et $E(4; -6; 2)$.

- a. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.
- b. Montrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (ABD) .
- c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD) .
- d. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE) .
- e. Déterminer les coordonnées du point F , intersection de la droite (CE) et du plan (ABD) .

