Correction des exercices de révision

Les textes *en italique* sont des commentaires pour vous aider à comprendre les réponses, mais ce ne sont pas des phrases à inclure dans votre rédaction.

① Égalités et équations

Exercice 1 – Montrer des égalités

a. *On va développer le membre de gauche et le membre de droite en espérant tomber sur le même résultat.*

$x^2 + 4x + 3(x-2) = x^2 + 4x + 3x - 6 = x^2 + 7x - 6$

et $x(x+7) - 6 = x^2 + 7x - 6$

Ainsi, l'égalité $x^2 + 4x + 3(x-2) = x(x+7) - 6$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. *Ici, on a une expression développée à gauche et une expression factorisée à droite.*

Dans ce cas, le plus simple est de développer l'expression de droite : en général, il est plus facile de développer que de factoriser.

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x^2+3x-2)\\
&= x \times x^2 + x \times 3x - x \times 2 - 1 \times x^2 - 1 \times 3x + 1 \times 2\\
&= x^3 + 3x^2 - 2x - x^2 - 3x + 2\\
&= x^3 + 2x^2 - 5x + 2
\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = (x-1)(x^2+3x-2)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Résoudre des équations

a. *Il s'agit d'une équation du 1^er^ degré comme en 4^ème^ et 3^ème^ : on « fait passer tous les x » dans le même membre.*

$$\begin{aligned}
&-x - 7 = 3x + 6\\
&\Leftrightarrow -x - 3x = 6 + 7\\
&\Leftrightarrow -4x = 13\\
&\Leftrightarrow x = \frac{13}{-4} \quad \text{et } \boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}\right\}
\end{aligned}$$

b. *On peut développer le membre de gauche pour retomber sur une équation du 1^er^ degré.*

$$\begin{aligned}
&5(2x-7) + 11 = 2x\\
&\Leftrightarrow 10x - 35 + 11 = 2x\\
&\Leftrightarrow 10x - 24 = 2x\\
&\Leftrightarrow 10x - 2x = 24\\
&\Leftrightarrow 8x = 24\\
&\Leftrightarrow x = \frac{24}{8} = 3 \quad \text{et } \boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}\}
\end{aligned}$$

c. *Oh non, des fractions ! On peut les réduire au même dénominateur, pour ensuite multiplier les deux membres de l'équation par ce dénominateur, et ainsi se débarrasser des fractions.*

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5x}{3} + \frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow \frac{6x}{12} - \frac{4}{12} = \frac{20x}{12} + \frac{9}{12}\\
&\Leftrightarrow \frac{6x-4}{12} = \frac{20x+9}{12}\\
&\Leftrightarrow 6x - 4 = 20x + 9\\
&\Leftrightarrow 6x - 20x = 4 + 9\\
&\Leftrightarrow -14x = 13\\
&\Leftrightarrow x = \frac{13}{-14} \quad \text{et } \boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{14}}\right\}
\end{aligned}$$

d. *Ici on peut essayer de multiplier les deux membres par* 5 *pour se débarrasser de la fraction de gauche. Mais attention à bien tout multiplier par* 5 *dans le membre de droite.*
On aurait aussi pu dire qu'on réduisait tout au même dénominateur, comme dans le ***c****.*

$$\begin{aligned}&\frac{6x-2}{5}=4x+1\\ &\Leftrightarrow 5\times\frac{6x-2}{5}=5(4x+1)\\ &\Leftrightarrow 6x-2=20x+5\\ &\Leftrightarrow 6x-20x=5+2\\ &\Leftrightarrow -14x=7\\ &\Leftrightarrow x=\frac{7}{-14}=-\frac{1}{2}\quad \text{et } \boldsymbol{S}=\left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right\}\end{aligned}$$

Exercice 3 – Carrés et équations produit nul

a. *Ne pas oublier que ce genre d'équation admet souvent deux solutions opposées.*

$$x^2-16=0\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow x=\pm 4\quad \text{et } \boldsymbol{S}=\{\mathbf{-4};\mathbf{4}\}$$

On peut aussi utiliser la factorisation avec l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$x^2-16=0\Leftrightarrow x^2-4^2=0\Leftrightarrow (x+4)(x-4)=0$$

Il s'agit d'une équation produit nul et on retrouve $S=\{-4\,;4\}$.

b. $2x^2-34=0\Leftrightarrow 2x^2=34\Leftrightarrow x^2=17\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{17}$ et $\boldsymbol{S}=\{-\sqrt{\mathbf{17}}\,;\sqrt{\mathbf{17}}\}$

c. $x^2+10=0\Leftrightarrow x^2=-10$.

Un carré ne peut pas être négatif, donc l'équation n'a pas de solution : $\boldsymbol{S}=\emptyset$.

d. $(2x-3)(-x+5)=0$ est une équation produit nul.

Or $2x-3=0\Leftrightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

et $-x+5=0\Leftrightarrow -x=-5\Leftrightarrow x=5$

donc $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}};\mathbf{5}\right\}$.

Exercice 4 – Exprimer y en fonction de x

Le but est donc de faire passer tout ce qui n'est pas y dans le membre de droite.
On commence généralement par déplacer les termes (ce qui est additionné ou soustrait) puis on termine avec les facteurs.

a.

$$\begin{aligned} &3x - y = 7 \\ &\Leftrightarrow -y = 7 - 3x \\ &\Leftrightarrow y = -(7 - 3x) \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{y = -7 + 3x} \end{aligned}$$

Notez que sur la fin, on a changé le signe de TOUS les termes à droite : le 7*, mais aussi le* $-3x$.

b.

$$\begin{aligned} &6x + 2y - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2y = 7 - 6x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{7 - 6x}{2} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{y = 3{,}5 - 3x} \end{aligned}$$

Notez que sur la fin, on a divisé TOUS les termes à droite par 2.**c.**

$$\begin{aligned} &5x + 8y - 1 = y + 3x + 6 \\ &\Leftrightarrow 8y - y = 3x + 6 + 1 - 5x \\ &\Leftrightarrow 7y = 7 - 2x \\ &\Leftrightarrow y = \frac{7 - 2x}{7} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{y = 1 - \frac{2}{7}x} \end{aligned}$$

d. *Ici, on peut s'en sortir avec un produit en croix.*

$$\frac{5}{y} = 3x \Leftrightarrow 5 = 3x \times y \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{5}{3x}}$$

② Factoriser

Exercice 1 – Diverses factorisations

a. *La correction est détaillée, mais ce genre de factorisation peut être faite de tête en Terminale.*

$A = 4y^2 - 7y = y \times 4y - y \times 7 = \boldsymbol{y(4y-7)}$

$B = 5x^2 + 15x = 5x \times x + 5x \times 3 = \boldsymbol{5x(x+3)}$ *Ne pas oublier de factoriser par x, et par 5 !*

$C = x^3 + 5x^2 - 7x = x \times x^2 + x \times 5x - x \times 7 = \boldsymbol{x(x^2+5x-7)}$

b. *Ici, vous êtes forcés de trouver un facteur commun précis. Cela arrive, par exemple, quand on veut montrer qu'une suite est géométrique avec une raison que l'on devine déjà.*

$D = 0{,}7x - 4{,}2 = 0{,}7 \times x - 0{,}7 \times 6 = \boldsymbol{0{,}7(x-6)}$ *L'idée était de rechercher, éventuellement en divisant $4{,}2$ par $0{,}7$ à la calculatrice, la réponse de la multiplication à trous $0{,}7 \times \ldots = 4{,}2$.*

$E = 7{,}65 + 0{,}9y = 0{,}9 \times 0{,}85 + 0{,}9 \times y = \boldsymbol{0{,}9(0{,}85+y)}$

$F = 3x^2 - 12x = -3x \times (-x) + (-3x) \times 4 = \boldsymbol{-3x(-x+4)}$ *Pour ne pas vous tromper sur les signes, pensez à développer de tête ce que vous avez trouvé et vérifiez que vous retombez bien sur l'expression donnée.*

$G = 14x^2 + 7x = 7x \times 2x + 7x \times 1 = \boldsymbol{7x(2x+1)}$ *Ne surtout pas oublier le $+1$ dans la parenthèse !*

Essayez de développer de tête l'expression que vous avez trouvée pour vérifier votre réponse.

c. *Dans le H ou le I, on ne peut rien barrer initialement. Par exemple, le 4 du H ne multiplie pas tout le numérateur. Il faut d'abord factoriser.*

$$H = \frac{4x+12}{4} = \frac{4 \times x + 4 \times 3}{4} = \frac{4(x+3)}{4} = \boldsymbol{x+3}$$

$$I = \frac{2x^2 - 6x}{2x} = \frac{2x \times x - 2x \times 3}{2x} = \frac{2x(x-3)}{2x} = \boldsymbol{x-3}$$

$$J = \frac{3x - x^2}{5x + 4x^2} = \frac{x \times 3 - x \times x}{x \times 5 + x \times 4x} = \frac{x(3-x)}{x(5+4x)} = \boldsymbol{\frac{3-x}{5+4x}}$$

Dans le J, on ne peux pas simplifier davantage en barrant les x, car les x restants ne sont pas en facteur.

Exercice 2 – Factoriser par une somme ou une différence entre parenthèses

a.

$$\begin{aligned}
&(2x-3)(24x-3) + (2x-3)(-22x+5) \\
&= (2x-3)\big((24x-3) + (-22x+5)\big) \\
&= (2x-3)(24x-3-22x+5) \\
&= \boldsymbol{(2x-3)(2x+2)}
\end{aligned}$$

On pourrait aussi continuer de factoriser la deuxième parenthèse par 2 pour trouver $(2x-3)\big(2(x+1)\big)$ soit $2(2x-3)(x+1)$ en changeant l'ordre des multiplications.

b. *Il y a un signe – devant la deuxième parenthèse, donc il faudra changer le signe de tous ses termes.*

$$\begin{aligned}
&(13t+5)(-5t+2) - (8t-15)(13t+5) \\
&= (13t+5)\big((-5t+2) - (8t-15)\big) \\
&= (13t+5)(-5t+2-8t+15) \\
&= \boldsymbol{(13t+5)(-13t+17)}
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
&(x^2+5)3x + (7x-1)(x^2+5) \\
&= (x^2+5)\big(3x + (7x-1)\big) \\
&= (x^2+5)(3x+7x-1) \\
&= \boldsymbol{(x^2+5)(10x-1)}
\end{aligned}$$

d. *Ne pas oublier que $(x+4)^2$, c'est $(x+4)$ multiplié par lui-même.*

$$\begin{aligned}&(2x-1)(x+4)-(x+4)^2\\&=(2x-1)(x+4)-(x+4)(x+4)\\&=(x+4)\big((2x-1)-(x+4)\big)\\&=(x+4)(2x-1-x-4)\\&=\boldsymbol{(x+4)(x-5)}\end{aligned}$$

Exercice 3 – Factoriser par une somme ou une différence entre parenthèses

La correction est détaillée, mais ce genre de factorisation peut être faite de tête en Terminale.
En le faisant de tête, pensez bien à identifier le a et le b de l'identité remarquable.

$A=t^2+18t+81=t^2+2\times t\times 9+9^2=\boldsymbol{(t+9)^2}$

$B=x^2-12x+36=x^2-2\times x\times 6+6^2=\boldsymbol{(x-6)^2}$

La C n'est pas écrite dans l'ordre habituel : 81 est un carré parfait, de même que 16.
Mais on la réordonne : $C=81+16y^2-72y=81-72y+16y^2=9^2-2\times 9\times 4y+(4y)^2=\boldsymbol{(9-4y)^2}$

$D=x^2-16=x^2-4^2=\boldsymbol{(x+4)(x-4)}$

$E=100x^2-9=(10x)^2-3^2=\boldsymbol{(10x+3)(10x-3)}$

$F=36-81z^2=6^2-(9z)^2=\boldsymbol{(6+9z)(6-9z)}$

Exercice 4 – Factoriser à l'aide des puissances

Cet exercice utilise les formules sur les puissances telles que $a^m\times a^n=a^{m+n}$. Par exemple, $t^3=t^2\times t$.

a. $A=t^4+6t^3-t^2=t^2\times t^2+t^2\times 6t-t^2\times 1=\boldsymbol{t^2(t^2+6t-1)}$

$B=8x^3-10x^2+6x=2x\times 4x^2-2x\times 5x+2x\times 3=\boldsymbol{2x(4x^2-5x+3)}$

Dans le C, x^2 ne semble pas être un facteur commun… la seule possibilité est alors d'utiliser les fractions !
Par exemple, $x=x^2\times\frac{1}{x}$.

$C=4x^2+7x-1=x^2\times 4+x^2\times\frac{7}{x}-x^2\times\frac{1}{x^2}=\boldsymbol{x^2\left(4+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$

b. *Ne pas oublier les opérations sur les fractions :* $\frac{5}{x}=\frac{5\times 1}{x}=5\times\frac{1}{x}$

$D=\frac{5}{x}+\frac{7x^2}{x}=\frac{1}{x}\times 5+\frac{1}{x}\times 7x^2=\boldsymbol{\frac{1}{x}(5+7x^2)}$

$E=\frac{3}{x}+1=\frac{1}{x}\times 3+\frac{1}{x}\times x=\boldsymbol{\frac{1}{x}(3+x)}$

$F=\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}-3=\frac{1}{x^2}\times 6-\frac{1}{x^2}\times x-\frac{1}{x^2}\times 3x^2=\boldsymbol{\frac{1}{x^2}(6-x-3x^2)}$

c. $G=e^{2x}-3e^x=e^x\times e^x-e^x\times 3=\boldsymbol{e^x(e^x-3)}$

$H=e^{4x}+e^{-x}=e^{4x}\times 1+e^{4x}\times e^{-5x}=\boldsymbol{e^{4x}(1+e^{-5x})}$

$I=e^x+e^{-x}+\frac{1}{e^{3x}}=e^{-x}\times e^{2x}+e^{-x}\times 1+e^{-x}\times e^{-2x}=\boldsymbol{e^{-x}(e^{2x}+1+e^{-2x})}$

③ Polynômes du second degré

Exercice 1 – Racines et tableau de signes

Attention aux signes de a, b et c quand vous appliquez la formule $\Delta = b^2 - 4ac$ et des racines.

$\boldsymbol{A(x) = -2x^2 - 4x + 30}$

Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 30 = 16 + 240 = 256$ qui est positif.

Les racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{256}}{2 \times (-2)} = \frac{4 - 16}{-4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{256}}{2 \times (-2)} = \frac{4 + 16}{-4} = -5$$

Le coefficient $a = -2$ est négatif, donc on en déduit le tableau de signes.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{B(x) = x^2 - x - 7}$

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 1 + 28 = 29$, il est positif.

Les racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{29}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{29}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

Le coefficient $a = 1$ est positif, donc on en déduit le tableau de signes.

Quand les racines n'ont pas d'expression simple, on préfère utiliser leur nom dans le tableau.

On n'utilise PAS de valeur approchée. Attention à l'ordre des racines, ici $x_1 < x_2$ mais ce n'est pas toujours le cas.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{C(x) = 3x^2 - 6x + 3}$

On pourrait utiliser le discriminant comme ci-dessus, mais il y aune méthode plus élégante.

$C(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$ grâce à une identité remarquable.

C admet donc 1 pour racine double. Un carré étant toujours positif, $C(x)$ l'est également.

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$C(x)$		$+$	0	$+$	

Notez que dans ce cas, le discriminant est nul et on parle de racine double.

$\boldsymbol{D(x) = 3x^2 - 3x + 4}$

Le discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 9 - 48 = -37$. Il est négatif, donc D n'a pas de racines.

Le coefficient $a = 3$ est positif, donc on en déduit le tableau de signes.

x	$-\infty$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	

Exercice 2 – Sur un intervalle restreint

On reprend les tableaux de l'exercice précédent et on les « coupe ».

Pour le B, on remarque (éventuellement en calculant les valeurs approchées de x_1 et x_2) que $x_1 < 1 < x_2 < 5$.

x	-2		3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

x	1		x_2		5
$B(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		3
$C(x)$		$+$	0	$+$	

Exercice 3 – Changement de variable

On pose $X = x^2$, on a alors $X^2 = (x^2)^2 = x^4$. L'équation se réécrit $X^2 + X - 6 = 0$.

Il s'agit d'une équation du second degré, le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$.

Les racines sont donc

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Ainsi, si x est la solution de l'équation initiale, on a $x^2 = -3$ ou bien $x^2 = 2$.

Or un carré ne peut pas être négatif, donc forcément $x^2 = 2$.

On en déduit que $x = \sqrt{2}$ ou bien $x = -\sqrt{2}$, et ainsi $\boldsymbol{S} = \{-\sqrt{\mathbf{2}}\,; \sqrt{\mathbf{2}}\}$**.**

Exercice 4 – Factorisation et équation produit nul

a. *On doit montrer qu'une expression développée est égale à une expression factorisée. Mieux vaut partir de l'expression factorisée, et la développer.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
&(x - 1)(x^2 - 4x - 9) \\
&= x \times x^2 - x \times 4x - x \times 9 - 1 \times x^2 - 1 \times (-4x) - 1 \times (-9) \\
&= x^3 - 4x^2 - 9x - x^2 + 4x + 9 \\
&= x^3 - 5x^2 - 5x + 9 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b. L'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $(x - 1)(x^2 - 4x - 9) = 0$, est une équation produit nul.

- L'équation $x - 1 = 0$ a pour solution 1.
- L'équation $x^2 - 4x - 9 = 0$ est une équation du second degré.

Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 16 + 36 = 52$

Les solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{52}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{52}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

Ainsi, il y a trois solutions, et donc f admet trois racines. $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{13}}; \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{13}}\}$

④ Inégalités et inéquations

Exercice 1 – Inéquations classiques *Ne pas oublier que si on change le signe des deux membres, ou si on les change en leur inverse, cela change le sens de l'inéquation. A part ça, cela se résout comme les équations !*

a.

$$\begin{aligned}&-5x+1<2-3x\\ &\Leftrightarrow -5x+3x<2-1\\ &\Leftrightarrow -2x<1\\ &\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2} \text{ et } S=\left]-\boldsymbol{\frac{1}{2}};+\infty\right[\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}&x-14\leq -4x+1\\ &\Leftrightarrow x+4x\leq 1+14\\ &\Leftrightarrow 5x\leq 15\\ &\Leftrightarrow x\leq 3 \quad \text{et} \quad S=]-\infty;\mathbf{3}]\end{aligned}$$

Exercice 2 – Inéquations et polynômes

a. Le polynôme $2x^2-14x+24$ admet pour discriminant $\Delta=(-14)^2-4\times 2\times 24=196-192=4$

Il admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{-(-14)-\sqrt{4}}{2\times 2}=\frac{14-2}{4}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-14)+\sqrt{4}}{2\times 2}=\frac{14+2}{4}=4$$

Le coefficient $a=2$ est positif, donc on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$2x^2-14x+24$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $2x^2-14x+24\geq 0$ est $S=]-\infty;\mathbf{3}]\cup[\mathbf{4};+\infty[$

b. *On fait tout passer du même côté pour avoir un polynôme du second degré à gauche, et* 0 *à droite.*

$$-x^2+2>5x-3 \Leftrightarrow -x^2-5x+2+3>0 \Leftrightarrow -x^2-5x+5>0$$

Le polynôme $-x^2-5x+5$ admet pour discriminant $\Delta=(-5)^2-4\times(-1)\times 5=25+20=45$

Il admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{45}}{2\times(-1)}=-\frac{5-3\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{45}}{2\times(-1)}=-\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$$

Le coefficient $a=-1$ est négatif, donc on en déduit le tableau de signes, en remarquant que $x_2<x_1$:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-x^2-5x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $-x^2+2>5x-3$, c'est-à-dire $-x^2-5x+5>0$, est $S=]\boldsymbol{x_2};\boldsymbol{x_1}[$.

c. *On commence par appliquer la même méthode, mais on se rend compte que le polynôme est en fait une identité remarquable.*

$$x^2+9\geq 6x \Leftrightarrow x^2-6x+9\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2\times x\times 3+3^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$$

Or, un carré est toujours positif, donc l'inéquation $(x-3)^2\geq 0$ est vraie pour tout x réel. Ainsi, $S=\mathbb{R}$.

Exercice 3 – Appliquer une fonction

a. $f(0) = 0(1-0) = 0 \times 1 = 0$ et $f(0,5) = 0,5 \times (1 - 0,5) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

b. On applique la fonction f, qui est croissante sur $[0; 0,5]$, à cette inégalité. On obtient :

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq 0,5 \\ &\Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(0,5) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0 \leq x(1-x) \leq 0,25} \end{aligned}$$

d'après la question **a** et l'expression de f.

Exercice 4 – Appliquer une fonction

Soit $x \in [2\,;3]$, c'est-à-dire $2 \leq x \leq 3$. On applique la fonciton f, décroissante sur $[2\,;3]$, à cette inégalité.

$$\begin{aligned} &2 \leq x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(3) \end{aligned}$$

f est décroissante, cela change le sens de l'inégalité. De plus :

$$f(2) = \frac{4 \times 2}{2-1} = \frac{8}{1} = 8 \quad \text{et} \quad f(3) = \frac{4 \times 3}{3-1} = \frac{12}{2} = 6$$

On trouve donc bien :

$$2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow \mathbf{8 \geq f(x) \geq 6}$$

et ainsi $x \in [2; 3]$, alors $f(x) \in [6; 8]$.

⑤ Étudier un signe, dresser un tableau de signes

Exercice 1 – Fonctions affines

a. 5 est positif, et $5x + 10 = 0 \Leftrightarrow 5x = -10 \Leftrightarrow x = -2$ donc le tableau de signes de $5x + 10$ est :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$5x+10$		$-$	0	$+$	

b. -3 est négatif, et $-3x + 7 = 0 \Leftrightarrow -3x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ donc le tableau de signes de $5x + 10$ est :

x	$-\infty$		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$-3x+7$		$+$	0	$-$	

c. -1 est négatif, et $-x + 9 = 0 \Leftrightarrow -x = -9 \Leftrightarrow x = 9$ donc le tableau de signes de $-x + 9$ est :

x	$-\infty$		9		$+\infty$
$-x+9$		$+$	0	$-$	

d. L'expression peut se réécrire $\frac{1}{3}x - 4$.

$\frac{1}{3}$ est positif, et $\frac{x}{3} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 4 \Leftrightarrow x = 12$ donc le tableau de signes de $\frac{x}{3} - 4$ est :

x	$-\infty$		12		$+\infty$
$\frac{x}{3}-4$		$-$	0	$+$	

Exercice 2 – Produits & quotients

On « empile » plusieurs tableaux de signes. Attention, on ne peut faire ça <u>que quand l'expression est factorisée</u> !
On ajoute alors <u>une ligne par facteur</u>.

a.

• 1 *(le coefficient directeur de $x + 1$)* est positif, et $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

• -3 est négatif, et $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(-3x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b.

• 4 est positif, et $4x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

• 3 est positif, et $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

On dresse le tableau de signes *en faisant bien attention à écrire* $\frac{7}{4}$ *et* $-\frac{1}{3}$ *dans l'ordre croissant* :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$4x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{4x-7}{3x+1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Notez que l'expression n'est pas définie pour $x = -\frac{1}{3}$ *car alors le dénominateur* $3x + 1$ *s'annule.*

On l'indique par une double barre.

c.

• 3 est positif, et $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• -7 est négatif, et $-7x - 1 = 0 \Leftrightarrow -7x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		0		$+\infty$
$3x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-7x-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$3x(-7x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d.

• 2 est positif, et $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

• un carré est toujours positif, donc $x^2 + 5$ est strictement positif pour tout x.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	
x^2+5		$+$	|	$+$	
$\frac{2x-6}{x^2+5}$		$-$	0	$+$	

Exercice 3 – Factorisations

a. $2x^2 - 6x = 2x \times x - 2x \times 3 = 2x(x-3)$

• 2 est positif, et $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• 1 est positif, et $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. $14x^2 - 7x^3 = 7x^2 \times 2 - 7x^2 \times x = 7x^2(2-x)$

• un carré est toujours positif, donc $7x^2$ est positif pour tout x et s'annule pour $x = 0$.

• -1 est négatif, et $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$7x^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$7x^2(2-x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

c. $xe^x - 2e^x = e^x \times x - e^x \times 2 = e^x(x-2)$

• l'exponentielle est strictement positive pour tout x, ainsi le signe de l'expression ne dépend que de $(x-2)$.

• 1 est positif, et $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
e^x		$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$e^x(x-2)$		$-$	0	$+$	

d. $5e^{2x} - 3xe^{2x} = e^{2x} \times 5 - e^{2x} \times 3x = e^{2x}(5-3x)$

• l'exponentielle est strictement positive pour tout x, ainsi le signe de l'expression ne dépend que de $(5-3x)$.

• -3 est négatif, et $5 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
e^{2x}		$+$	|	$+$	
$5-3x$		$+$	0	$-$	
$e^{2x}(5-3x)$		$+$	0	$-$	

e. *Il faut d'abord écrire l'expression sous la forme d'une seule fraction.*

$$\frac{4}{x} - 1 = \frac{4}{x} - \frac{x}{x} = \frac{4-x}{x}$$

• -1 est négatif, et $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{4-x}{x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

f.

$$\frac{2}{x^2} - \frac{7}{3x} = \frac{2 \times 3}{3x^2} - \frac{7 \times x}{3x^2} = \frac{6-7x}{3x^2}$$

• -7 est négatif, et $6 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$

• un carré est toujours positif, donc $3x^2$ est positif pour tout x et s'annule pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$6-7x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{6-7x}{3x^2}$		$+$	||	$+$	0	$-$	

Exercice 4 – Tableau de variations

On calcule $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$.

Ainsi, le minimum de f sur $[0; +\infty[$ est 0, on en déduit que $f(x)$ est positif pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Cela se voit mieux quand on écrit le 0 *directement dans le tableau.*

⑥ Dériver une fonction, tableau de variations

Exercice 1 - Somme et différence $u + v$ et $u - v$

$$f'_1(x) = \mathbf{2x - 1}$$
$$f'_2(x) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}}$$
$$f'_3(x) = \mathbf{5x^4 - 3x^2}$$
$$f_4(x) = -\frac{3}{x^4} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^4}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}}$$

Attention, il y a en effet deux signes – pour le deuxième terme de f'_4 : celui qui était dans l'expression de f_4 et celui qui vient de la dérivée de $\frac{1}{x}$.

Exercice 2 - Multiplication par une constante ku

$$f'_1(x) = 7 \times 1 = \mathbf{7}$$
$$f'_2(x) = 5 \times 2x = \mathbf{10x}$$
$$f'_3(x) = \frac{1}{6} \times 4x^3 = \frac{4}{6}x^3 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{x^3}$$
$$f'_4(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{x^2}}$$
$$f'_5(x) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3x^2}}$$
$$f'_6(x) = 10 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{\sqrt{x}}}$$
$$f'_7(x) = -5 \times 5x^4 = \mathbf{-25x^4}$$

Exercice 3 - Somme, différence et multiplication par une constante.

$$f'_1(x) = 2 \times 3x^2 - 2x + 7 \times 1 = \mathbf{6x^2 - 2x + 7}$$
$$f'_2(x) = 4x^3 - \frac{5}{2} \times 2x + 1 = \mathbf{4x^3 - 5x + 1}$$
$$f'_3(x) = 5(2x + 3) = \mathbf{10x + 15}$$
$$f'_4(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6\sqrt{x}}} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{x^2}}$$

Exercice 4 – Produits $u \times v$

- $\mathbf{f_1(x) = (3x - 7)(-x^2 + 4)}$

On pose $u(x) = 3x - 7$ et $v(x) = -x^2 + 4$

On a donc : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -2x$

$f'_1(x) = 3 \times (-x^2 + 4) + (3x - 7) \times (-2x) = -3x^2 + 12 - 6x^2 + 14x = \mathbf{-9x^2 + 14x + 12}$

- $\mathbf{f_2(x) = \frac{1}{x}(9 - 6x)}$

On pose $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 9 - 6x$

On a donc : $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = -6$

$f'_2(x) = -\frac{1}{x^2}(9 - 6x) + \frac{1}{x} \times (-6) = -\frac{9 - 6x}{x^2} - \frac{6}{x} = \frac{-9 + 6x}{x^2} - \frac{6x}{x^2} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{x^2}}$

- $\mathbf{f_3(x) = x^2\sqrt{x}}$

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a donc : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'_3(x) = 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x}{2} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \boldsymbol{\frac{5x\sqrt{x}}{2}}$$

Notez que pour x strictement positif, $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

- $\boldsymbol{f_4(x) = -\frac{7}{x}(\frac{x^5}{10} - x^2)}$

On pose $u(x) = -\frac{7}{x}$ et $v(x) = \frac{x^5}{10} - x^2$

On a donc : $u'(x) = -7 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{7}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{5x^4}{10} - 2x = \frac{x^4}{2} - 2x$

$$f'_4(x) = \frac{7}{x^2}\left(\frac{x^5}{10} - x^2\right) + \left(-\frac{7}{x}\right)\left(\frac{x^4}{2} - 2x\right) = \frac{7x^3}{10} - 7 - \frac{7x^3}{2} + 14 = \frac{7x^3}{10} - \frac{35x^3}{10} + 7 = \boldsymbol{-\frac{14}{5}x^3 + 7}$$

Exercice 5 – Quotients $\boldsymbol{\frac{u}{v}}$

- $\boldsymbol{f_1(x) = \frac{-3x+2}{4x+1}}$

On pose $u(x) = -3x + 2$ et $v(x) = 4x + 1$

On a donc : $u'(x) = -3$ et $v'(x) = 4$

$$f'_1(x) = \frac{-3(4x+1) - (-3x+2) \times 4}{(4x+1)^2} = \frac{-12x - 3 + 12x - 8}{(4x+1)^2} = \boldsymbol{\frac{-11}{(4x+1)^2}}$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ *(tous les nombres réels, sauf* $-\frac{1}{4}$ *)*

- $\boldsymbol{f_2(x) = \frac{x^2+x+1}{x-3}}$

On pose $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = x - 3$

On a donc : $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = 1$

$$f'_2(x) = \frac{(2x+1)(x-3) - (x^2+x+1) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x + x - 3 - x^2 - x - 1}{(x-3)^2} = \boldsymbol{\frac{x^2 - 6x - 4}{(x-3)^2}}$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

- $\boldsymbol{f_3(x) = 2x - \frac{8x}{1-6x}}$

Ce n'est pas un quotient pour l'instant, à cause de ce $2x$. Il faut donc l'écrire sous la forme d'une fraction.

$$f_3(x) = 2x - \frac{8x}{1-6x} = \frac{2x(1-6x)}{1-6x} - \frac{8x}{1-6x} = \frac{2x - 12x^2 - 8x}{1-6x} = \frac{-12x^2 - 6x}{1-6x}$$

On pourrait aussi factoriser par -6.

On pose $u(x) = -12x^2 - 6x$ et $v(x) = 1 - 6x$

On a donc : $u'(x) = -24x - 6$ et $v'(x) = -6$

$$f'_3(x) = \frac{(-24x-6)(1-6x) - (-12x^2-6x) \times (-6)}{(1-6x)^2} = \frac{-24x - 6 + 144x^2 + 36x - 72x^2 - 36x}{(1-6x)^2} = \boldsymbol{\frac{72x^2 - 24x - 6}{(1-6x)^2}}$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{6}\right\}$

- $\boldsymbol{f_4(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+5}}$

On pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 5$

On a donc : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2x$

$$f'_4(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+5) - \sqrt{x} \times 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \times 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{\frac{x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x} \times 2x) \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x^2+5)^2} = \frac{\frac{x^2 + 5 - 4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+5)^2} = \boldsymbol{\frac{-3x^2 + 5}{2\sqrt{x}(x^2+5)^2}}$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ *car le dénominateur de* f_4 *ne s'annule jamais.*

Exercice 6 – Tableaux de variations

- $\boldsymbol{f_1(x) = 3x^2 + 18x}$

Cette fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet pour dérivée $f'_1(x) = 3 \times 2x + 18 = \boldsymbol{6x + 18}$

On dresse le tableau de signe de la dérivée, qui est une fonction affine de coefficient directeur positif.

De plus, $6x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f_1		↘		↗	

- $\boldsymbol{f_2(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1}$

Cette fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet pour dérivée $f'_2(x) = 3x^2 - 2 \times 2x - 4 \times 1 = \boldsymbol{3x^2 - 4x - 4}$

C'est une fonction polynôme, son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 16 + 48 = 64$

Les racines du polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{4 + 8}{6} = 2$$

Le coefficient dominant du polynôme $a = 3$ étant positif, on dresse le tableau de signes de la dérivée :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
signe de $f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f_2		↗		↘		↗	

- $\boldsymbol{f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x}$

Cette fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet pour dérivée : $f_3'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 + 2 = x^2 + 2$

Or cette dérivée est la somme d'un carré et d'un nombre positif : elle est toujours strictement positive.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f_3'(x)$		$+$	
variations de f_3		↗	

- $\boldsymbol{f_4(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{8}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{8}x$

Cette fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ admet pour dérivée : $f_4'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{8}$

Mais on veut étudier le signe de cette dérivée, donc il faut l'écrire sous la forme d'une seule fraction.

$$f_4'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} = -\frac{8}{8x^2} - \frac{x^2}{8x^2} = \frac{-8 - x^2}{8x^2}$$

Le numérateur $-8 - x^2$ est strictement négatif pour tout x non nul,

et le dénominateur $8x^2$ est toujours positif (il s'annule en 0).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f_4'(x)$		$-$	‖	$-$	
variations de f_4		↘	‖	↘	

- $\boldsymbol{f_5(x) = \frac{5x-6}{x+3}}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Déterminons sa dérivée.

On pose $u(x) = 5x - 6$ et $v(x) = x + 3$

On a donc : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 1$

$$f'_5(x) = \frac{5(x+3) - (5x-6) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{5x + 15 - 5x + 6}{(x+3)^2} = \frac{21}{(x+3)^2}$$

Le numérateur est strictement positif, et le dénominateur est un carré, aussi strictement positif pour $x \neq -3$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
signe de $f_5'(x)$	$+$	‖	$+$
variations de f_5	↗	‖	↗

- $\boldsymbol{f_6(x) = 7 - \frac{10}{5-x}}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$. Déterminons sa dérivée. La dérivée de la constante 7 est 0.

On pose $u(x) = -10$ et $v(x) = 5 - x$

On a donc : $u'(x) = 0$ et $v'(x) = -1$

$$f'_6(x) = \frac{0 \times (5-x) - (-10) \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{-10}{(5-x)^2}$$

Le numérateur est strictement négatif, et le dénominateur est un carré, strictement positif pour $x \neq 5$.

Ainsi, la dérivée est négative sur tout l'ensemble de définition.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
signe de $f_6'(x)$	$-$	‖	$-$
variations de f_6	↘	‖	↘

- $\boldsymbol{f_7(x) = \frac{1}{5x^2-2x+1}}$

On peut démontrer que le polynôme au dénominateur n'a pas de racines (son discriminant est strictement négatif), donc la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. On utilise la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ pour déterminer la dérivée.

On pose $v(x) = 5x^2 - 2x + 1$, on a alors $v'(x) = 5 \times 2x - 2 \times 1 = 10x - 2$. Ainsi :

$$f'_7(x) = -\frac{10x - 2}{(5x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{-10x + 2}{(5x^2 - 2x + 1)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif comme vu précédemment, donc le signe de la dérivée est celui de $-10x + 2$, une fonciton affine de coefficient directeur négatif, qui s'annule pour $x = 0{,}2$.

x	$-\infty$	$0,2$	$+\infty$
signe de $f_7'(x)$	$+$	0	$-$
variations de f_7	↗		↘

- $\boldsymbol{f_8(x) = \frac{-7}{(x-1)^2}}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Déterminons sa dérivée.

On pose $\quad u(x) = -7 \quad$ et $v(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

On a donc : $\quad u'(x) = 0 \quad$ et $v'(x) = 2x - 2$

$$f'_8(x) = \frac{0 \times (x-1)^2 - (-7) \times (2x-2)}{((x-1)^2)^2} = \frac{14x - 14}{(x-1)^4} = \frac{14(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{14}{(x-1)^3}$$

Le numérateur est strictement positif, et le dénominateur est du signe de $x - 1$, fonction affine de coefficient directeur positif qui s'annule en 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f'_8(x)$		$-$	‖	$+$	
variations de f_8		↘	‖	↗	

⑦ Tangentes et position des courbes

Exercice 1 – Appliquer la formule

a. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = 3(x-1) + (-1)$$
$$\boldsymbol{y = 3x - 4}$$

b. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -6 admet pour équation réduite :

$$y = f'(-6)\big(x - (-6)\big) + f(-6)$$
$$y = 5(x+6) + 6$$
$$\boldsymbol{y = 5x + 36}$$

Exercice 2 – Lire un nombre dérivé

Les deux questions (image et nombre dérivé) sont assez différentes.

L'image est l'ordonnée du point dont l'abscisse est donnée.

Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente, il correspond à la « pente » de la droite quand on s'y décale d'une unité à droite.

a. $f(2) = \mathbf{1}$; $f'(2) = \mathbf{4}$; $f(0) = \mathbf{-3}$ et $f'(0) = \mathbf{0}$

Notez qu'un nombre dérivé nul correspond à une tangente horizontale, de coefficient directeur 0.

b. $f(-3) = \mathbf{1}$ et $f'(-3) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

c. $f(1) = \mathbf{-1}$; $f'(1) = \mathbf{-2}$; $f(4) = \mathbf{2}$ et $f'(4) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

Exercice 3 – Dériver, puis appliquer la formule

a. On a $f'(x) = 2 \times 2x = 4x$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 admet pour équation réduite :

$$y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)$$
$$y = -4(x+1) + (-3)$$
$$\boldsymbol{y = -4x - 7}$$

b. En utilisant la dérivée d'un quotient, on a $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 1 \times x + (-1)$$
$$\boldsymbol{y = x - 1}$$

c. On a $f'(x) = 4x^3 + 3 \times 2x = 4x^3 + 6x$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = 10(x-1) + 9$$
$$\boldsymbol{y = 10x - 1}$$

Exercice 4 – Positions relatives

a. On a $f'(x) = 2x - 3$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 admet pour équation réduite :

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$
$$y = 5(x-4) + 4$$
$$\boldsymbol{y = 5x - 16}$$

Pour étudier la position relative de la courbe et de la tangente, on étudie le signe de :

$f(x) - (5x - 16) = x^2 - 3x - 5x + 16 = x^2 - 8x + 16$

Ce polynôme du second degré peut être factorisé avec une identité remarquable.

Ainsi, $f(x) - (5x - 16) = (x + 4)^2$ qui est un carré, donc toujours positif.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours **au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $\boldsymbol{4}$**.

b. On a trouvé dans **l'exercice 3** que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet pour équation réduite : $y = x - 1$.

Pour étudier la position relative de la courbe et de la tangente, on étudie le signe de :

$$f(x) - (x-1) = -\frac{1}{x+1} - (x-1) = -\frac{1}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = -\frac{1}{x+1} - \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1}$$

On dresse un tableau de signes de cette expression en remarquant que $-x^2$ est négatif pour tout x.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(x-1)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

La courbe $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $\boldsymbol{0}$ sur $]-\infty ; \boldsymbol{-1}[$ puis en-dessous sur $]\boldsymbol{-1} ; +\infty[$.**

c. Pour x réel, on étudie le signe de :

$$f(x) - g(x) = (x^2 - 3x - 12) - (-x^2 + 7x) = x^2 - 3x - 12 + x^2 - 7x = 2x^2 - 10x - 12$$

Ce polynôme du second degré a pour racines -1 et 5, *on le trouve avec le discriminant.*

Son coefficient dominant $a = 2$ est positif,

donc le polynôme est positif sur $]-\infty ; -1] \cup [5 ; +\infty[$, et négatif sur $[-1 ; 5]$.

Ainsi, **sur $]-\infty ; \boldsymbol{-1}] \cup [\boldsymbol{5} ; +\infty[$, la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ est au-dessus de la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$.**

Sur $[\boldsymbol{-1} ; \boldsymbol{5}]$, c'est la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$ qui est au-dessus de la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$.