Méthodes et techniques

1 Égalités et équations

Pour montrer que deux expressions sont égales, sous la forme d'une égalité A=B, il existe 4 façons :

- on part de A pour aller à B,
- on part de B pour aller à A,
- on montre que A B = 0,
- on montre que A et B sont égales à une troisième expression C.

Si une expression est factorisée et l'autre non, le plus simple est souvent de développer celle qui est factorisée.

Exemple Pour montrer que pour tout x réel, $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 1)$, il est largement plus facile de développer $(x+1)(x^2 - 3x + 1)$.

Dans le cas d'une **équation** (une égalité où l'on cherche à trouver les valeurs possibles d'une inconnue), ou bien quand on cherche à exprimer un nombre en fonction du reste, on peut :

- « faire passer un nombre de l'autre côté », c-à-d. ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres,
- multiplier/diviser les deux membres par le même nombre.
- appliquer une fonction dans les deux membres, c'est-à-dire transformer a=b en f(a)=f(b).

Attention Voici deux erreurs fréquentes :

• soit l'égalité 3y = 6x - 1. Si on veut diviser les membres par 3 pour isoler y, attention à bien diviser tout le 6 6x - 1 1

membre de droite! On ne trouve pas $y = \frac{6}{3}x - 1$, mais bien $y = \frac{6x-1}{3} = 2x - \frac{1}{3}$

• soit l'égalité $x^2 = 9$. On se dit qu'il suffit d'appliquer la racine carrée pour obtenir x = 3.

Mais attention, la racine carrée n'est définie que pour des nombres positifs ! Les solutions de l'équation $x^2 = 9$ sont en fait 3 **et** -3.

(2) Factoriser

Cela signifie « transformer une somme en un produit », les expressions multipliées sont alors les facteurs.

Trouver un facteur commun simple.

Attention au signe quand vous factorisez par un facteur négatif! En cas de doute, essayez de développer l'expression que vous avez factorisée, pour vérifier que vous retombez bien sur l'expression de départ.

Exemples
$$A(x) = 15x + 3x^2$$
 peut se factoriser en $A(x) = 3x(5 + x)$ $B(x) = -7x^2 + 21x - 35$ peut se factoriser en $B(x) = -7(x^2 - 3x + 5)$, attention aux signes!

Identités remarquables

Pour tous
$$a$$
 et b réels : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemples
$$A(x) = 4x^2 - 12x + 9$$
 est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ et se factorise en $A(x) = (2x - 3)^2$ $B(x) = 9x^2 - 49$ est de la forme $a^2 - b^2$ et se factorise en $B(x) = (3x + 7)(3x - 7)$ $C(x) = x^2 - 13$ est de la forme $a^2 - b^2$ et se factorise en $C(x) = (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$

Factoriser par une somme ou une différence

On peut factoriser par une somme ou une différence entre parenthèses, ce qui est utile pour les études de signe.

Exemples
$$A(x) = 5(x+3) - (x-1)(x+3) = (x+3)(5-(x-1)) = (x+3)(-x+6)$$

 $B(x) = (2x+7) + (2x+7)^2 = (2x+7)(1+(2x+7)) = (2x+7)(3x+8)$

Factorisation (suite)

Utiliser les puissances

On peut parfois factoriser une expression qui comprend des puissances, il faut alors se rappeler des règles :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
 et $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$A(x) = x^5 - 2x^3$$
 se factorise en $A(x) = x^3 \times x^2 - x^3 \times 2 = x^3(x^2 - 2)$

$$B(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3} = \frac{2x^2}{x \times x^2} - \frac{5}{x^3} = \frac{2x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3} = \frac{2x^2 - 5}{x^3}$$

« Forcer » une factorisation

Il est parfois nécessaire de factoriser une expression, même si le facteur commun n'est pas visible.

En Terminale, on aura souvent besoin de factoriser un polynôme par le terme de plus haut degré.

Exemple On pose $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$. Supposons qu'on veuille factoriser cette expression par x^3 .

Pour cela, on va **rajouter des multiplications et des divisions par** x^3 à chaque terme qui n'en a pas. Ainsi :

$$f(x) = x^3 \times 1 - \frac{5x^2}{x^3} \times x^3 + \frac{7x}{x^3} \times x^3 - \frac{1}{x^3} \times x^3$$
$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{7x}{x^3} - \frac{1}{x^3}\right)$$
$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

Avec un peu d'habitude, en maîtrisant les opérations sur les puissances, on peut le faire en une seule étape!

(3) Polynômes du second degré

Un polynôme du second degré est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Il existe d'autres polynômes de degré plus grand, le degré est en fait la plus grand puissance à laquelle x est mis (et à l'inverse, une fonction affine est un polynôme de degré 1...)

Pour étudier le signe d'un polynôme du second degré, on calcule son discriminant : le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Attention les lettres Δ , α , b et c sont fréquemment utilisées, mais ce ne sont pas des notations universelles. Dans les exercices, évitez d'utiliser α , b et c, et précisez toujours que c'est le discriminant que vous appelez Δ .

• s'il est **positif**, le polynôme a **deux racines** : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,

les racines étant les valeurs de \boldsymbol{x} où le polynôme s'annule.

• s'il est **nul**, le polynôme a **une racine** « **double** » : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

C'est la même formule que ci-dessus, sans le $\sqrt{\Delta}$ qui vaut 0 ici.

• s'il est négatif, le polynôme n'a pas de racines, il ne s'annule jamais.

Exemple Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 11x + 6$. Étudions son signe.

f est un polynôme du second degré. Son discriminant Δ vaut : $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 3 \times 6 = 121 - 72 = 49$.

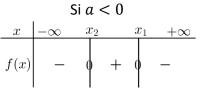
$$\Delta$$
 est positif donc f admet deux racines : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{11 + 7}{6} = 3$

et
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{11 - 7}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

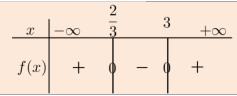
Polynômes du second degré (suite)

Avec les racines, on peut dresser le tableau de signes, qui dépend du signe de a, le « coefficient dominant » :





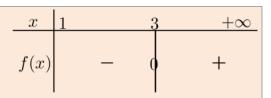
Exemple Le polynôme f vu précédemment a pour tableau de signes :



Restriction à un intervalle

Parfois, on ne s'intéresse qu'au polynôme sur un intervalle, plutôt que sur \mathbb{R} , ce qui revient à « couper » le tableau de signes.

Exemple Le polynôme f vu précédemment a pour tableau de signes sur $[1; +\infty[$:



Factorisation

Une fois qu'on a trouvé les racines du polynôme, on peut l'écrire sous une forme factorisée :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple Le polynôme $f(x) = 3x^2 - 11x + 6$ vu précédemment, ayant pour racines 3 et $\frac{2}{3}$, se réécrit :

$$f(x) = 3(x-3)(x-\frac{2}{3})$$

Le polynôme $g(x) = x^2 - 3x - 10$ vu précédemment, a pour racines 5 et -2 et s'écrit

$$g(x) = (x-5)(x+2)$$

Notez que le facteur a a disparu (il vaut 1) et que la racine -2 nous donne un facteur (x+2).

Racines évidentes

Afin de s'épargner le calcul du discriminant, on peut parfois chercher des racines « évidentes », c'est-à-dire faciles à trouver. On peut par exemple tester 1,0,2,-1... Si on a trouvé une racine, on peut trouver la deuxième avec la propriété suivante : si un polynôme a deux racines, leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.

Exemple Le polynôme $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ admet $x_1 = 1$ pour racine évidente.

On sait que le produit x_1x_2 doit être égal à $-\frac{6}{2}=-3$, ainsi on trouve $x_2=-3$.

Identités remarquables

Parfois, un polynôme correspond à une identité remarquable. Dans ce cas, pas besoin de faire toute l'étude, il suffit de le factoriser avec l'identité remarquable.

Exemple Le polynôme $f(x) = x^2 - 10x + 25$ se réécrit $f(x) = (x - 5)^2$, donc sa racine double est 5 et il est toujours positif.

4 Inégalités et inéquations

Les inégalités fonctionnent comme les égalités (1), à quelques détails près.

• Si on **mutliplie ou divise** les deux membres par un **nombre négatif**, ou si on **change le signe** des deux membres (ce qui équivaut à les multiplier par -1), alors le **sens de l'inégalité** change également.

Notez qu'additionner ou soustraire un même nombre négatif ne change rien.

• Dans une égalité, on peut appliquer une fonction aux deux membres, c-à-d. passer de a=b à f(a)=f(b) Dans une inégalité, il faut pour cela que la fonction soit **monotone**, c'est-à-dire **soit croissante**, **soit décroissante**. Si f est strictement **croissante**, on peut toujours passer de a < b à f(a) < f(b).

Mais si f est strictement **décroissante**, on passe de a < b à f(a) > f(b).

Exemple Dans l'inéquation 4x + 1 < 3x + 2, si on veut appliquer la fonction inverse $\frac{1}{x}$, on obtient :

$$\frac{1}{4x+1} > \frac{1}{3x+2}$$

En effet, la fonction inverse est strictement décroissante sur tout son ensemble de définition.

Signes cachés

Attention également si vous devez diviser par une variable : elle peut éventuellement être négative, et si vous ne connaissez pas son signe, vous ne pourrez pas diviser par cette variable.

Exemple On considère l'inéquation $x^3 + 2x > 5x^2 - 3x$.

On aimerait diviser par x, mais pour cela il faut qu'on soit sûr du signe de x!

Si par exemple on a supposé que $x \in]0; +\infty[$, on a le droit de le faire sans changer le sens de l'inégalité :

$$x^{3} + 2x > 5x^{2} - 3x \Leftrightarrow \frac{x^{3} + 2x}{x} > \frac{5x^{2} - 3x}{x} \Leftrightarrow x^{2} + 2 > 5x - 3$$

Études de signe 5

Si une inégalité A(x) < B(x) est trop dure à démontrer, on peut le faire en posant f(x) = B(x) - A(x) et en cherchant le signe de f(x). En effet, f(x) sera positif si et seulement si A(x) < B(x).

On peut donc chercher à faire le **tableau de signes de** f.

Exemple L'inéquation $x^2 + 2 > 5x - 3$ vue précédemment est équivalente à $x^2 - 5x + 5 > 0$. On peut donc la résoudre en étudiant le signe du polynôme $f(x) = x^2 - 5x + 5$.

Plus facile que prévu

Supposons que vous voulez montrer que A(x) > B(x) pour tout x réel.

Si vous arrivez à montrer que A(x) > B(x) + C(x) où C est une expression positive, c'est réussi!

De même, pour montrer que A(x) est plus grand que B(x), on peut montrer que « A(x) est plus grand qu'une expression qui est plus grande que B(x) ».

Exemple Supposons que vous devez montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$, et que vous savez déjà que $e^x \ge x + 1$. Or x + 1 > x, donc il est clair que $e^x > x$.

(5) Étudier un signe, dresser un tableau de signes

Les études de signe interviennent dans plusieurs problèmes, parmi lesquels :

- une fois qu'on a calculé une dérivée 6, on doit étudier son signe pour en déduire les variations de la fonction
- savoir sur quel domaine une **courbe** \mathcal{C}_f est au-dessus d'une courbe \mathcal{C}_q revient à étudier le signe de f(x) g(x)
- idem pour savoir sur quel domaine la courbe d'une fonction est au-dessus de sa tangente (7)

Il faut factoriser!

Règle importante : pour connaître le signe d'une expression, elle doit être sous la forme d'un **produit** ou d'un **quotient**, car on peut alors appliquer les règles de signes (« moins fois moins égal plus », etc).

Exemple Pour étudier le signe de $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$, définie pour tout x non nul, on l'écrit sous la forme :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$$

car c'est un quotient, alors qu'au début il s'agissait d'une somme.

De même, on ne fait un tableau de signes que lorsque l'expression est un produit ou un quotient.

Exemple Pour étudier le signe de $f(x) = 3x + 7 - \frac{1}{x}$, on ne peut pas, par exemple, faire un tableau avec une

ligne indiquant le signe de 3x + 7 et une ligne indiquant le signe de $-\frac{1}{x}$: ça ne sert à rien, ce ne sont pas des facteurs. En revanche, on peut réécrire f(x) sur un même dénominateur :

$$f(x) = 3x + 7 - \frac{1}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{7x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{3x^2 + 7x + 1}{x}$$

et ainsi, on étudie le signe de $3x^2 + 7x + 1$ (un polynôme du second degré) et de x dans deux lignes du tableau.

Fonctions affines

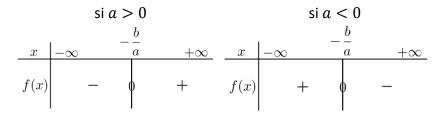
Si un des facteurs est de la forme ax + b,

il s'annule en $-\frac{b}{a}$ et son signe est :

- si a est positif : d'abord négatif, puis positif
- si a est négatif : d'abord positif, puis négatif

Vous pouvez écrire la ligne du tableau et indiquer

les signes d'un tel facteur sans justifier.



Polynômes du second degré 3

Si un des facteurs est un polynôme du second degré, vous pouvez chercher ses **racines et en déduire son signe**. Pensez à regarder aussi s'il est possible de factoriser facilement le polynôme, par exemple avec une identité remarquable ou une racine évidente.

Étudier un signe, dresser un tableau de signes (suite)

Facteurs positifs

Si le produit ou le quotient incluent des facteurs qui sont **toujours positifs**, on peut éviter de les étudier (en l'expliquant dans la rédaction), car ils n'influent pas sur le signe de l'expression.

Cela inclut : les carrés, les exponentielles et les racines carrées.

Exemple Pour étudier le signe de
$$f(x) = \frac{(x+1)^2(2x-3)}{e^{-x+1}}$$
, on écrit que :

 $(x+1)^2$ et e^{-x+1} sont positifs pour tout x réel, et ainsi le signe de f(x) ne dépend que de celui de (2x-3). On établit donc juste le tableau de signes de (2x-3).

Inéquations 4

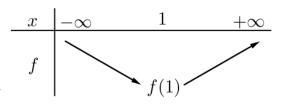
Parfois, l'expression à étudier ne peut pas être factorisée, mais on peut résoudre une inéquation avec 0 dans le second membre (c'est-à-dire, résoudre $f(x) \ge 0$).

Exemple Pour étudier le signe de
$$f(x) = x^2 - 5$$
, on résout : $x^2 - 5 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 5$.

On remarque que f(x) s'annule pour $x=\sqrt{5}$ ou $x=-\sqrt{5}$, et en se rappelant de la courbe de la fonction carré, on en déduit que f(x) est positif sur $]-\infty;-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5};+\infty[$ et négatif sur $[-\sqrt{5};\sqrt{5}].$

Avec un tableau de variations

Parfois, le sens de variation d'une fonction nous éclaire sur son signe. Considérons le tableau de variation d'une fonction f ci-contre : Si f(1) est positif, on peut en déduire que f(x) est positif pour tout x réel.



(6) <u>Dériver une fonction</u>, tableau de variations

La dérivée d'une fonction a une utilité première : dresser le **tableau de variations** de la fonction. Pour dériver une fonction, on regarde si elle est sous la forme d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

Exemple $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ est une somme, $g(x) = (2x - 3)\sqrt{x + 7}$ est un produit, $h(x) = \frac{4x - 7}{x^2 + 1}$ est un quotient.

Si c'est une somme, on peut dériver facilement.

Mais si c'est un **produit** ou un **quotient**, on nomme les deux facteurs u et v, et on applique les formules :

$$(uv)' = u'v + uv'$$
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Attention si vous nommez une fonction u ou v, leur expression doit se noter u(x) ou v(x).

On n'écrit pas, par exemple, $\mathbf{u}=2x+1$, $v=x^2+1$ ou encore v'=2x, mais plutôt $\mathbf{u}(x)=2x+1$...

En fait, u représente la fonction, la « machine » qui à un nombre x fait correspondre son image u(x).

Il existe aussi la notation $u: x \mapsto 2x + 1$, que vous avez le droit d'utiliser si vous la préférez.

Avant de dériver une fonction, on explique aussi **pourquoi elle est dérivable**. Généralement, c'est une somme/différence/produit/quotient de fonctions dérivables, ou une composée de fonctions dérivables.

Exemple Rédaction à suivre pour dériver $h(x) = \frac{4x-7}{x^2+1}$:

h est dérivable sur $\mathbb R$ car c'est un quotient de fonctions dérivables.

On a
$$h = \frac{u}{v}$$
 avec $u(x) = 4x - 7$ et $v(x) = x^2 + 1$
donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$

Ainsi, pour tout
$$x \in \mathbb{R}$$
, $h'(x) = \frac{4 \times (x^2 + 1) + (4x - 7) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 + 8x^2 - 14x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{12x^2 - 14x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

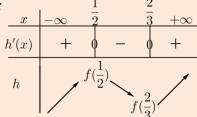
Une fois la dérivée obtenue, on essaie si possible de la factoriser ou de l'écrire comme un produit/quotient de facteurs dont on peut étudier le signe séparément, afin d'étudier le signe 5 de la dérivée tout entière. En effet, c'est ce qui donnera le sens de variation de la fonction.

Exemple Poursuite de l'étude de $h(x) = \frac{4x-7}{x^2+1}$ et de sa dérivée $h'(x) = \frac{12x^2-14x+4}{(x^2+1)^2}$

 $(x^2+1)^2$ est un carré, positif pour tout x réel, donc le signe de h'(x) ne dépend que de celui de $12x^2-14x+4$. C'est un polynôme du 2^{nd} degré, de discriminant $\Delta=(-14)^2-4\times 12\times 4=196-192=4>0$ et de racines :

$$x_1 = \frac{-(-14) + \sqrt{4}}{2 \times 12} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$
 $x_2 = \frac{-(-14) - \sqrt{4}}{2 \times 12} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

On dresse le tableau de signes de la dérivée :



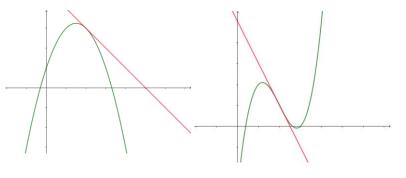
Notez les valeurs de x où h'(x) s'annule en change de signe, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$: on les appelle les **extremums locaux**.

Précisément, h admet un maximum local en $\frac{1}{2}$ et un minimum local en $\frac{2}{3}$.

Généralement, quand on dresse un tableau de variations, on y écrit la valeur des extremums, ici $f(\frac{1}{2})$ et $f(\frac{2}{3})$. charly-piva.fr

7 Tangentes et position des courbes

Lorsqu'on a dérivé une fonction, on peut tracer des **tangentes** à sa courbe : ce sont des droites qui « touchent » la courbe en un point, et qui permettent de mieux voir la croissance ou la décroissance de la fonction en ce point.



Déterminer et utiliser des tangentes

Les tangentes sont des droites dont l'équation est celle d'une fonction affine.

Pour une fonction f dérivable en un point a, l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Généralement, on écrit cette équation en remplaçant α par le nombre demandé, puis on développe.

Exemple Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$. Déterminons sa tangente en 2.

f est dérivable sur $\mathbb R$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb R$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 10 \times 1 = 3x^2 - 12x + 10$$

On a $f'(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 10 = -2$ et $f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 10 \times 2 - 3 = 1$

Ainsi, l'équation de T, la tangente à \mathcal{C}_f en 2 est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = -2(x-2) + 1 = -2x + 4 + 1 = -2x + 5$$

On remarque que le coefficient directeur de la tangente est égal à f'(a).

En particulier, si la tangente à \mathcal{C}_f en un point a est horizontale, cela signifie que la dérivée s'annule : f'(a) = 0.

Ces remarques sont utiles pour les exercices de **lecture graphique** : si une tangente est tracée, on peut lire f'(a).

Positions relatives d'une courbe et d'une tangente

Une fois qu'une tangente T est tracée, on peut s'intéresser aux positions relatives de la tangente T et de \mathcal{C}_f , c'est-à-dire savoir **pour quelles valeurs de** x, la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de T, ou en-dessous.

Pour cela, si T a pour équation ax + b, on **étudie le signe** (5) de f(x) - (ax + b), éventuellement avec un **tableau de signes**.

Si cette expression est positive, c'est que C_f est au-dessus de T.

Si elle est négative, c'est que \mathcal{C}_f est en-dessous de T.

Si elle s'annule pour une valeur de x, alors c'est que \mathcal{C}_f et T se coupent au point de coordonnées (x, f(x)).

Exemple Soit g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -x^2 + 3x + 1$.

On peut démontrer que T, sa tangente en 2, a pour équation y=-x+5.

Mais quelle est sa position par rapport à \mathcal{C}_g ? Pour le savoir, il faudra **étudier le signe** de :

$$g(x) - (-x + 5) = -x^2 + 3x + 1 + x - 5 = -x^2 + 4x - 4$$

Positions relatives de deux courbes

De la même manière, si on dispose de deux fonctions f et g, on peut étudier la position relative de \mathcal{C}_f et de \mathcal{C}_g . Cela revient à **étudier le signe** \bigcirc **de** f(x) - g(x).