

Chapitre 5 – Fonction logarithme népérien

1. Définition

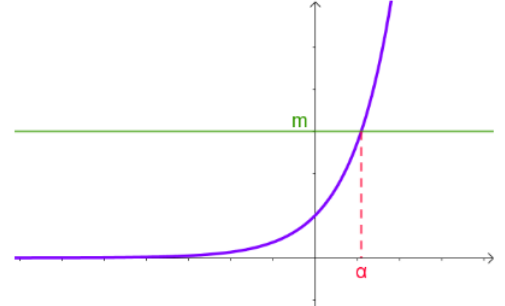
1a. Réciproque de $\exp$

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

D'après le **corollaire du TVI**, on peut donc démontrer que **pour tout m strictement positif, il existe un unique α tel que $e^\alpha = m$.**

Autrement dit, **tout nombre strictement positif a un unique antécédent par la fonction exponentielle.**



Définition : la fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction qui à tout $x \in]0; +\infty[$, associe l'unique nombre y tel que $x = e^y$.

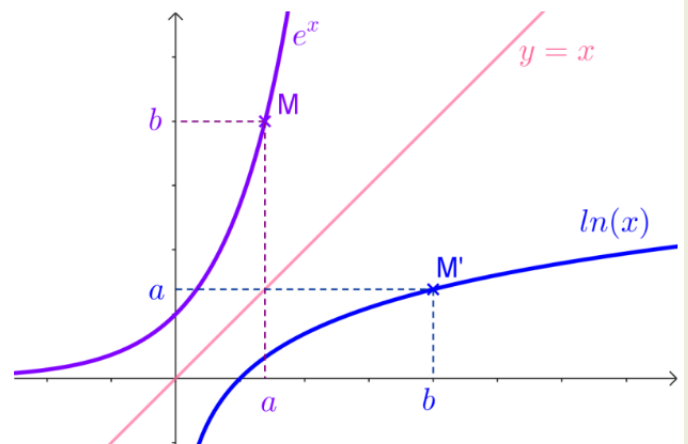
On a donc $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$

1b. Premières propriétés

- pour tout $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$

Soit $M(a; b)$ appartenant à la courbe de $\exp$.
On a $e^a = b$ et par définition de $\ln$, $a = \ln(b)$.
Ainsi, le point $M'(b; a)$ appartient à la courbe de $\ln$.

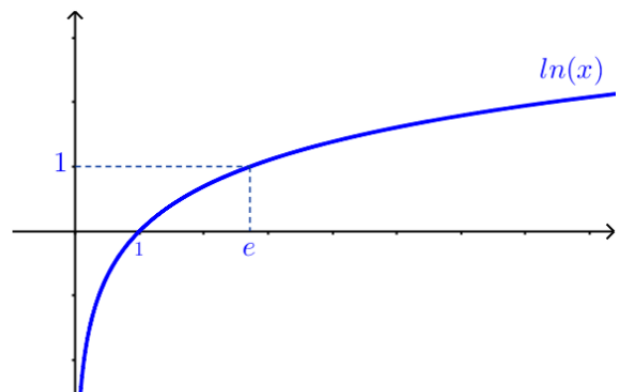
Ainsi, **pour tout point $(a; b)$ de la courbe de $\exp$, on peut placer un point $(b; a)$ de la courbe de $\ln$.**
Le fait de permuter les coordonnées revient à tracer la **symétrique de la courbe de $\exp$ par rapport à la droite d'équation $y = x$** (qu'on appelle la « première bissectrice »).



$\ln$ est une fonction **définie sur $]0; +\infty[$** car l'exponentielle d'un nombre réel est toujours strictement positive.

Comme $e^0 = 1$, on a $\ln(1) = 0$
et comme $e^1 = e$, alors $\ln(e) = 1$.
Notez que $\ln(0)$ n'existe pas !

On écrit parfois **$\ln a$, sans parenthèses**, au lieu de $\ln(a)$.



1c. Croissance, équations et inéquations

Propriété : $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration : soient deux réels a et b strictement positifs, tels que $a < b$.
Comme $a = e^{\ln(a)}$ et $b = e^{\ln(b)}$, on obtient donc $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$.

La fonction $\exp$ étant strictement croissante, on a alors $\ln(a) < \ln(b)$.

Ainsi, on a montré que si $a < b$, alors $\ln(a) < \ln(b)$.

La fonction $\ln$ est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque : Ainsi, on peut appliquer $\ln$ (ou $\exp$) aux deux membres d'une équation ou inéquation.

Pour a, b réels strictement positifs :

$$\bullet a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

$$\bullet a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$$

Pour a, b réels :

$$\bullet a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$\bullet a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$

Si une expression est de la forme $\ln(u(x))$, on commence par vérifier ses **conditions d'existence**.

En effet, $\ln(u(x))$ n'existe que pour les réels x tels que $u(x) > 0$.

Exemple 1 Soient f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(2x + 1)$ et $g(x) = \ln(4 - x)$.

a. Quelle est l'ensemble de définition de ces deux fonctions ?

b. Étudier la position relative des courbes de f et de g sur leur ensemble de définition commun.

Exemple 2 Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir vérifié les conditions d'existence.

a. $7 - \ln x < 4$

b. $\ln(2x + 3) = 2 \ln(-x)$

c. $-e^{2x+5} + 5 = 2$

d. $\ln(x^2 + 6x + 10) = 0$

Exemple 3 Résoudre les équations suivantes à l'aide d'un changement de variable.

a. $(\ln x)^2 - 4(\ln x) - 5 = 0$

b. $e^{2x} - 2e^x = 8$

Exemple 1

a. $f(x)$ est défini pour tout réel x tel que $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -0,5$,
donc sur $] -0,5; +\infty[$.

$g(x)$ est défini pour tout réel x tel que $4 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$,
donc sur $] -\infty; 4[$.

b. L'ensemble de définition commun de f et de g est $] -0,5; 4[$. Pour x appartenant à cet ensemble :

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \ln(2x + 1) \geq \ln(4 - x) \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 4 - x \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [1; 4[$,

et en-dessous pour $x \in] -0,5; 1]$.

Exemple 2

a. On doit avoir $x > 0$, c'est-à-dire $x \in]0; +\infty[$.

$$7 - \ln x < 4 \Leftrightarrow -\ln x < -3 \Leftrightarrow \ln x > 3 \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^3 \Leftrightarrow x > e^3$$

Ainsi, $S =]e^3; +\infty[$.

Notez qu'avant d'appliquer la fonction $\exp$, il vaut mieux avoir uniquement une expression de la forme $\ln(a)$ dans un membre de l'équation, sans signe – ou autre opération.

C'est pourquoi on n'applique pas encore la fonction $\exp$ à l'étape « $-\ln x < -3$ ».

b. On doit avoir $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -1,5$, soit $x \in] - 1,5; +\infty[$

et $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, soit $x \in] - \infty; 0[$.

Ainsi, x doit appartenir à $] - 1,5; +\infty[\cap] - \infty; 0[$ c'est-à-dire $] - 1,5; 0[$.

$$\ln(2x + 3) = 2 \ln(-x)$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(2x+3)} = e^{2 \ln(-x)}$$

On utilise alors une des propriétés de la fonction exp : $e^{xy} = (e^x)^y$ pour retrouver une expression de la forme $e^{\ln(a)}$, qui est égale à a .

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = (e^{\ln(-x)})^2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = (-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16$, et ses racines sont

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2 \times (-1)} = -\frac{6}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + 4}{2 \times (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Or 3 n'appartient pas à l'intervalle $] - 1,5; 0[$, c'est une valeur interdite.

Ainsi, $S = \{-1\}$.

c. Cette équation n'a pas de valeur interdite.

$$-e^{2x+5} + 5 = 2$$

$$\Leftrightarrow -e^{2x+5} = -3$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+5} = 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x+5}) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(3) - 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\ln(3) - 5) \quad \text{et} \quad S = \left\{ \frac{1}{2}(\ln(3) - 5) \right\}$$

Les nombres exprimés à l'aide de la fonction ln n'ont souvent pas d'expression plus « simple ». Ici, la solution vaut environ $-1,95$, mais on demande une valeur exacte.

d. Le polynôme $x^2 + 6x + 10$ a pour discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 10 = -4$. Il n'a donc pas de racines, il est positif pour tout x .

L'équation n'a pas de valeur interdite.

$$\ln(x^2 + 6x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2+6x+10)} = e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0$$

Quand c'est possible, on utilise une identité remarquable plutôt que les polynômes.

$$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \quad \text{et} \quad S = \{-3\}$$

Exemple 3

a. L'équation est définie pour $x > 0$, c'est-à-dire $]0; +\infty[$.

On pose $X = \ln x$. L'équation devient $X^2 - 4X - 5 = 0$.

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$.

Les racines sont donc :

$$X_1 = \frac{4 - 6}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4 + 6}{2 \times 1} = \frac{10}{2} = 5$$

L'équation $X^2 - 4X - 5 = 0$ a donc deux solutions, $X_1 = 5$ et $X_2 = -1$.

Ainsi, l'équation initiale a deux solutions :

- x_1 telle que $\ln x_1 = X_1 \Leftrightarrow \ln x_1 = 5 \Leftrightarrow x_1 = e^5$
- x_2 telle que $\ln x_2 = X_2 \Leftrightarrow \ln x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = e^{-1}$

Ces deux nombres appartiennent bien à $]0; +\infty[$. Donc $\mathcal{S} = \{e^5; e^{-1}\}$

b. L'équation est définie pour tout x réel.

On pose $X = e^x$ (sachant que X^2 est alors égal à $(e^x)^2 = e^{2x}$). Ainsi :

$$X^2 - 2X = 8 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 8 = 0$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$.

Les racines sont donc :

$$X_1 = \frac{2 - 6}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2 + 6}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$$

L'équation $X^2 - 2X + 8 = 0$ a donc deux solutions, $X_1 = -2$ et $X_2 = 4$.

Ainsi, l'équation initiale a deux solutions :

- x_1 telle que $e^{x_1} = X_1 \Leftrightarrow e^{x_1} = -2$. Or une exponentielle ne peut pas être négative. *On ne peut d'ailleurs pas calculer $\ln(-2)$.*
- x_2 telle que $e^{x_2} = X_2 \Leftrightarrow e^{x_2} = 4 \Leftrightarrow x_2 = \ln(4)$.

Donc $\mathcal{S} = \{\ln(4)\}$

2. Propriétés algébriques

2a. Produit

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration : Soient deux réels a et b strictement positifs.

Nous allons calculer le produit ab de deux façons, avec les propriétés de $\exp$.

Tout d'abord : $ab = e^{\ln(ab)}$

Mais aussi, $ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$

Ainsi, $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$, ce qui signifie que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

En 1^{ère} et Terminale, on commence par étudier la fonction exponentielle, pour construire ensuite la fonction $\ln$.

Mais historiquement, ce sont les logarithmes qui ont été étudiés en premier, avec John Napier, dit Neper (1550-1617). Ce mathématicien et astronome écossais a cherché à faciliter les calculs qui pouvaient devenir longs et pénibles liés à l'astronomie, la navigation... en mettant au point une correspondance entre les termes d'une suite géométrique ($1 ; a ; a^2 ; \dots ; a^p ; \dots ; a^q ; \dots$) et ceux d'une suite arithmétique ($0 ; 1 ; 2 ; \dots ; p ; \dots ; q ; \dots$) à l'aide de la formule $a^p \times a^q = a^{p+q}$. Il met alors au point une table numérique à deux colonnes, appelée **table des logarithmes**.

Dans cette table, tout produit de deux nombres m et n de la première colonne est associé à l'addition de deux autres nombres x et y de la deuxième colonne.

Une fois cette table complétée, il est possible de retrouver le résultat de multiplications difficiles en effectuant seulement des additions, souvent bien plus faciles.



m	x
n	y
$m \times n$	$x + y$

Remarque : pour ne pas confondre les deux règles, on peut se rappeler que :

- la fonction $\exp$ les mêmes propriétés que les puissances : $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- et que la fonction $\ln$ a les propriétés inverses : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple 1 a. Exprimer $\ln 80$ en fonction de $\ln 5$ et $\ln 2$.

b. On donne $M = \ln 45 - 2 \ln 27$. Exprimer M en fonction de $\ln 5$ et $\ln 3$.

Exemple 2 Après avoir précisé les conditions d'existence, résoudre : $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(24)$.

Exemple 3 On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 4 \ln(3x)$.

Parmi les quatre propositions suivantes, une seule est vraie pour tout $x > 0$. Laquelle ?

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24)$ b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$ c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$ d. $f(2x) = 2f(x)$

Exemple 1 *La technique est de décomposer les nombres, ici 80, en produit de 2 et de 5, et de transformer ces $\ln$ de produits en sommes de $\ln$.*

a. $\ln(80) = \ln(2) + \ln(40) = 2 \ln(2) + \ln(20) = 3 \ln(2) + \ln(10) = 4 \ln(2) + \ln(5)$

b. $M = \ln(45) - 2 \ln(27)$

$= \ln(9) + \ln(5) - 2(\ln(9) + \ln(3))$

$= \ln(9) + \ln(5) - 2 \ln(9) - 2 \ln(3)$

$= -\ln(9) + \ln(5) - 2 \ln(3)$

$= -(\ln(3) + \ln(3)) + \ln(5) - 2 \ln(3)$

$= \ln(5) - 4 \ln(3)$

Exemple 2

L'équation est définie pour $x + 1 > 0$, soit pour $x > -1$, et pour $x - 1 > 0$, soit pour $x > 1$. Ainsi, elle est définie pour $x \in]1; +\infty[$.

$$\ln(x + 1) + \ln(x - 1) = \ln(24)$$

$$\Leftrightarrow \ln((x + 1)(x - 1)) = \ln(24)$$

On a une égalité de la forme $\ln(a) = \ln(b)$, donc on peut se débarrasser des $\ln$.

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 25$$

x peut donc être égal à 5 ou -5 , mais l'équation est définie sur $]1; +\infty[$.

Ainsi, **$S = \{5\}$** .

Exemple 3

On calcule $f(2x)$ en essayant de retrouver $f(x)$, c'est-à-dire $4 \ln(3x)$.

$$f(2x) = 4 \ln(3 \times 2x)$$

$$= 4 \ln(3x \times 2)$$

$$= 4(\ln(3x) + \ln 2)$$

$$= 4 \ln(3x) + 4 \ln 2$$

$$= f(x) + \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \ln 2$$

$$= f(x) + \ln(2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

$$= f(x) + \ln(16), \text{ réponse B.}$$

2b. Inverse et quotient

Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstration :

• Soit $a > 0$. $\frac{1}{a} = e^{\ln(\frac{1}{a})}$ mais aussi $\frac{1}{a} = \frac{1}{e^{\ln(a)}} = e^{-\ln(a)}$

On en déduit que $e^{\ln(\frac{1}{a})} = e^{-\ln(a)}$, et donc que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

• Soient a et b strictement positifs. En utilisant la propriété qu'on vient de démontrer, et la propriété de la somme :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Exemple 1 Exprimer en fonction de $\ln 2$ chacun des nombres suivants.

a. $\ln \frac{1}{4}$

b. $\ln 8 - 5\ln 2$

c. $\ln 10 - \ln 20$

Exemple 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

a. Déterminer son ensemble de définition.

b. Démontrer que pour tout x appartenant à son ensemble de définition :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$$

Exemple 1 *Il existe plusieurs façons d'arriver au résultat.*

a. $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -(\ln 2 + \ln 2) = -2 \ln 2$

b. $\ln 8 - 5 \ln 2 = \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 - 5 \ln 2 = -2 \ln 2$

c. $\ln 10 - \ln 20 = \ln\left(\frac{10}{20}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

Exemple 2

a. f est définie pour tout x tel que $1+x > 0$, soit $x > -1$.

Ainsi, f est définie sur $] -1; +\infty[$.

b. *On doit montrer une égalité. On peut partir de la forme initiale de la fonction, ou bien partir de la forme donnée par la question pour retrouver $f(x)$, ce qui est ici plus facile.*

Soit $x > -1$. Calculons :

$$\ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right) = \ln(e^x) - \ln(1+x) = x - \ln(1+x) = f(x)$$

2c. Puissances et racines

Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(a^n) = n \ln(a) \qquad \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

Démonstration : Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $\ln(a^n) = \ln((e^{\ln a})^n) = \ln(e^{n \ln a}) = n \ln a$
- $\frac{1}{n} \ln(a) = \frac{1}{n} \ln(\sqrt[n]{a}^n) = \frac{1}{n} \times n \ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(\sqrt[n]{a})$

Exemple 1 Exprimer chaque nombre en fonction de $\ln 3$.

a. $\ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln 81$ b. $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln(27)$ c. $e^{-2 \ln 2} + \ln(9e^2)$

Méthode : le fait que $\ln$ « transforme les puissances en multiplications » permet de **résoudre des inéquations où l'inconnue est en exposant**.

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes. a. $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ b. $1 - 0,96^n > 0,9$

Exemple 3 Un club sportif a ouvert en début 2020 avec 85 membres. Il estime qu'à chaque début d'année, son nombre d'adhérents augmentera de 17%.

Déterminer au début de quelle année son nombre d'adhérents dépassera 350.

Exemple 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = -\ln(x^2 + 1)$.

a. Déterminer son ensemble de définition.

b. Démontrer que pour tout x appartenant à son ensemble de définition :

$$f(x) = -2 \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Exemple 5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Montrer que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) - f(-x) = -x$.

Exemple 1 *À nouveau, il existe plusieurs façons d'arriver au résultat.*

a. $\ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln(81) = -\ln(9) + \ln(3^4) = -2 \ln 3 + 4 \ln 3 = 2 \ln 3$

b. $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln(27) = \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^3) = \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 3 - 3 \ln 3 = -\frac{7}{2} \ln 3$

c. $e^{-2 \ln 2} + \ln(9e^2) = (e^{\ln 2})^{-2} + \ln 9 + \ln(e^2) = 2^{-2} + 2 \ln 3 + 2 = 2 \ln 3 + \frac{9}{4}$

Exemple 2

a. *Ici, l'équation est de la forme $a^n < \dots$ et on peut appliquer $\ln$ dès le début.*

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) < \ln(10^{-3})$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{5}\right) < -3 \ln 10$$

On divise alors par $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$, qui est négatif ! En effet, $\frac{2}{5}$ est inférieur à 1.

$$\Leftrightarrow n > -\frac{3 \ln 10}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

On ne peut pas écrire ce résultat plus simplement, même avec les propriétés algébriques. Par exemple, $\ln 10$ peut s'écrire $\ln 2 + \ln 5$, mais cela ne nous permettra pas de simplifier.

Le résultat trouvé vaut approximativement 7,54. n est donc un entier supérieur à 7,54. Ainsi, **$n \geq 8$** .

b. Ici, il faut d'abord isoler le nombre à la puissance n (sans le signe $-$, donc) avant d'appliquer $\ln$.

$$1 - 0,96^n > 0,9$$

$$\Leftrightarrow -0,96^n > 0,9 - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,96^n > -0,1$$

$$\Leftrightarrow 0,96^n < 0,1$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,96^n) \Leftrightarrow \ln 0,1$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0,96 < \ln 0,1$$

On fait attention, car, de nouveau, $\ln 0,96$ est un nombre négatif.

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,96}$$

Ce résultat est approximativement égal à 56,41. Ainsi, **$n \geq 57$** .

Exemple 3 Le nombre d'adhérents peut se modéliser par une suite géométrique de premier terme $u_0 = 85$ et de raison $q = 1,17$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'adhérents à l'année $(2020 + n)$ est donné par la formule $u_n = 85 \times 1,17^n$. On résout l'inéquation :

$$85 \times 1,17^n > 350$$

$$\Leftrightarrow 1,17^n > \frac{350}{85}$$

$$\Leftrightarrow 1,17^n > \frac{70}{17}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,17^n) > \ln\left(\frac{70}{17}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,17) > \ln\left(\frac{70}{17}\right)$$

Ici, contrairement aux deux exemples précédents, $\ln(1,17)$ est positif car $1,17 > 1$.

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{70}{17}\right)}{\ln(1,17)}$$

Cette dernière valeur vaut 9,01. Donc n est un entier strictement supérieur à 9,01, il est donc supérieur ou égal à 10. Les 350 adhérents seront atteints **en 2030**.

Exemple 4

a. $x^2 + 1$ est strictement positif pour tout x réel, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Dans le résultat recherché, le $-2 \ln(x)$, qui est aussi égal à $-\ln(x^2)$, nous invite à factoriser le contenu du $\ln$ par x^2 dans l'expression initiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln(x^2 + 1) \\ &= -\ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= -\left(\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= -\ln(x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Exemple 5

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{-(-x)}) \\ &= \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) \\ &= \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \end{aligned}$$

Le fait qu'on doive trouver $-x$ à la fin, qui peut s'écrire aussi $\ln(e^{-x})$, nous invite à factoriser la fraction par e^{-x} pour voir ce qui se passe ensuite.

$$\begin{aligned} &= \ln\left(\frac{e^{-x} \left(\frac{1}{e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{e^x}\right)}{1 + e^x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^{-x}(e^x + 1)}{1 + e^x}\right) \end{aligned}$$

On a trouvé le même facteur au numérateur et au dénominateur !

On simplifie par $(e^x + 1)$.

$$\begin{aligned} &= \ln(e^{-x}) \\ &= -x \end{aligned}$$

3. Étude de la fonction

3a. Dérivée

Propriété : $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Remarque : la dérivée seconde de $\ln$ est donc la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

Ainsi, $\ln$ est une fonction concave.

Démonstration : On admet que la fonction $\ln$ est dérivable.

Soit f définie pour $x > 0$ par $f(x) = e^{\ln x} - x$.

Par définition du logarithme népérien, $e^{\ln x} = x$ et donc f est la fonction nulle. Sa dérivée est également la fonction nulle : pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0$.

Or en appliquant les règles de composition :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln'(x) \times e^{\ln x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln'(x) x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Exemple 1 Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 \ln x - \frac{4}{x}$

Montrer que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exemple 2 Dresser le tableau de variations, sans les limites, de f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x \ln x$.

Exemple 3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes sans se soucier de l'ensemble de définition.

$$f(x) = (\ln x + 3)(x - 2) \quad g(x) = \ln(x) - \frac{x^3}{\ln(x)}$$

Exemple 4 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 \ln x + 1$ sur $]0; +\infty[$.

a. Déterminer l'équation de la tangente T à C_f en 1.

b. Montrer qu'étudier la position relative de C_f et de sa tangente T revient à étudier le signe de la fonction g définie par $g(x) = \ln x - x + 1$.

c. Donner le sens de variation de g , calculer $g(1)$, et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

d. En déduire la position relative de C_f et T .

Exemple 1 Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{2x + 4}{x^2}$$

Or pour $x > 0$, $(2x + 4)$ et x^2 sont strictement positifs.

Ainsi $f'(x)$ est positif et **f est croissante sur $]0; +\infty[$.**

Exemple 2

On pose $u(x) = x$ $v(x) = \ln x$
 $u'(x) = 1$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Or $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

Ainsi, f est **décroissante sur $]0; e^{-1}]$ puis croissante sur $[e^{-1}; +\infty[$.**

Son minimum a pour valeur $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = e^{-1} \times (-1) = -e^{-1}$.

Exemple 3

• On pose $u(x) = \ln x + 3$ $v(x) = x - 2$
 $u'(x) = \frac{1}{x}$ $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x}(x - 2) + (\ln x + 3) \times 1 = 1 - \frac{2}{x} + \ln x + 3 = 4 - \frac{2}{x} + \ln x$$

• On pose $u(x) = x^3$ $v(x) = \ln x$
 $u'(x) = 3x^2$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3x^2 \times \ln x - x^3 \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{3x^2 \times \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$$

Exemple 4

a. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x}$

On a donc $f(1) = 2 \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$ et $f'(1) = \frac{2}{1} = 2$

Ainsi, l'équation de la tangente T est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$$

b. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente T revient à étudier le signe de $f(x) - (2x - 1) = 2 \ln x + 1 - 2x + 1 = 2 \ln x - 2x + 2 = 2(\ln x - x + 1)$

Ainsi, cela revient bien à étudier le signe de g .

c. $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Le signe de $g'(x)$ ne dépend que de celui de $(1 - x)$, qui est positif sur $]0; 1]$ puis négatif sur $[1; +\infty[$.

Ainsi, g est **croissante sur $]0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.**

Son maximum est $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.

On en déduit que pour tout $x > 0$, $g(x)$ est négatif.

d. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est **en-dessous de sa tangente T .**

3b. Fonction composée $\ln(u)$

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive. Alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple Calculer les dérivées des fonctions suivantes, sans se soucier de l'ensemble de définition.

$$f(x) = \ln(4 - 2x) ; g(x) = \ln(3x^2 + 1) ; h(x) = x^2 \ln(e^x + 1) ; i(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} ; j(x) = (\ln(4x - 1))^2$$

$$\bullet f'(x) = \frac{-2}{4 - 2x} = -\frac{1}{2 - x}$$

$$\bullet g'(x) = \frac{3 \times 2x}{3x^2 + 1} = \frac{6x}{3x^2 + 1}$$

$$\bullet \text{ On pose } u(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \ln(e^x + 1). \text{ Alors } u'(x) = 2x \text{ et } v'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$h'(x) = 2x \ln(e^x + 1) + x^2 \times \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\bullet \text{ On pose } u(x) = \ln(x^2 - 1) \text{ et } v(x) = x^2 - 1. \text{ Alors } u'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \text{ et } v'(x) = 2x.$$

$$i'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2 - 1} \times (x^2 - 1) - \ln(x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x - 2x \ln(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x(1 - \ln(x^2 - 1))}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\bullet \text{ On se rappelle que la dérivée d'une fonction de la forme } u^2 \text{ est } 2u'u.$$

$$\text{On pose } u(x) = \ln(4x - 1). \text{ On a } u'(x) = \frac{4}{4x - 1}$$

$$j'(x) = 2 \times \frac{4}{4x - 1} \times \ln(4x - 1) = \frac{8 \ln(4x - 1)}{4x - 1}$$

3c. Limites

Propriété : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Exemple 1 Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - \frac{3}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x^3)$$

Exemple 2 Dans chaque cas, donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition I .

a. $f(x) = \ln(3 - 4x)$ sur $I =] - \infty; \frac{3}{4} [$

b. $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+1}$ sur $I =] - 1; 2 [$

Exemple 1

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \ln(x) = -\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3}{x^2} = -\infty$ par quotient.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - \frac{3}{x^2} = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ donc par différence, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x^3 = +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x^3) = +\infty$.

Exemple 2

a.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - 4x = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3 - 4x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} 3 - 4x = 3 - 4 \times \frac{3}{4} = 0$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \ln(3 - 4x) = -\infty$

b.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 2 - x = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x + 1 = 0^+$. Par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{2-x}{x+1} = +\infty$

Donc par composition, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = +\infty$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 2 - x = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x + 1 = 3$. Par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2-x}{x+1} = 0$

Donc par composition, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = -\infty$

3d. Croissances comparées

Propriété : En cas de forme indéterminée sur un produit/quotient d'une fonction puissance par la fonction $\ln$, les **croissances comparées** permettent de lever l'indétermination. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0^-$$

Remarques :

- par passage à l'inverse, on trouve aussi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

- on peut aussi montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exemple 1 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x - \frac{3}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 3x^2$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 5}{x^3}$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sqrt{x}$ e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{(2-x)^3}$

Exemple 2 On considère f , fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

Dresser son tableau de variations complet.

Exemple 3 Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln x}{x}$

- Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Déterminer f' et montrer que pour tout x , $f'(x) = \frac{\theta(x)}{x^2}$ où θ est une fonction à déterminer.
- Étudier les variations de θ sur $]0; +\infty[$.
- Calculer $\theta(1)$. En déduire le signe de $\theta(x)$ selon les valeurs de x .
- En déduire les variations de f .

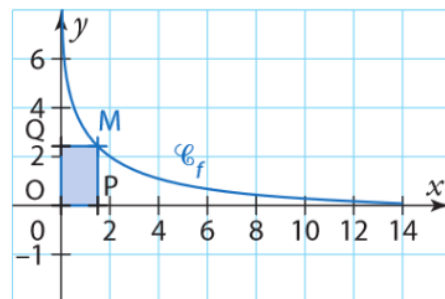
Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $]0; 14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

A tout point M de C_f , d'abscisse x , on associe le point P , projeté de M sur l'axe des abscisses, et le point Q , projeté de M sur l'axe des ordonnées.

- Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle $OPMQ$ en fonction de x .

Donner la limite de A en 0.

- Donner les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle $OMPQ$ est maximale.



Exemple 1

- Cette fonction étant définie sur $]0; +\infty[$, il s'agit d'une limite à droite en 0.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3}{x} = -\infty$.

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - \frac{3}{x} = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$.

Par somme, il s'agit d'une forme indéterminée.

Mais pour $x > 0$, $\ln x - 3x^2 = x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} - 3 \right)$

Or par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} - 3 \right) = -3$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 3x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} - 3 \right) = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 5 = +\infty$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Par quotient, il s'agit d'une forme indéterminée.

Mais $\frac{\ln x - 5}{x^3} = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{5}{x^3}$

Or par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$. De plus, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{x^3} = 0$.

Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} - \frac{5}{x^3} = 0$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \sqrt{x} = -\infty$ par composition.

Par produit, il s'agit d'une forme indéterminée.

Mais $x \ln \sqrt{x} = \sqrt{x^2} \ln \sqrt{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} X^2 \ln X = 0$, par croissances comparées.

Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2} \ln \sqrt{x} = 0$

e. Pour tout $x > 2$, $\frac{\ln(x-2)}{(2-x)^3} = -\frac{\ln(x-2)}{(x-2)^3}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X^3} = 0$ par croissances comparées.

Donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x-2)}{(2-x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(x-2)}{(x-2)^3} = 0$

Exemple 2 Il s'agit en fait des 3 premières questions d'un exercice du sujet de bac métropole 2023 jour 1 : les deux limites, et le tableau de variations.

• Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$

x étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $(x^2 - 4)$.

$x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$ car, à nouveau, x est strictement positif.

Ainsi, $f'(x)$ est négatif sur $]0; 2]$ puis positif sur $[2; +\infty[$.

Ainsi, f est **décroissante sur $]0; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$.**

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

- On calcule $f(2) = 2^2 - 8 \ln 2 = 4 - 8 \ln 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} -8 \ln x = +\infty$.

Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -8 \ln x = -\infty$.

Par somme, c'est une forme indéterminée. Mais :

$$f(x) = x^2 - 8 \ln x = x^2 \left(1 - \frac{8 \ln x}{x^2} \right)$$

Or par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{8 \ln x}{x^2} \right) = 1$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{8 \ln x}{x^2} \right) = +\infty$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$4 - 8 \ln 2$	$+\infty$

Exemple 3

- a. • En 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -3 \ln x = +\infty$.

Donc le numérateur tend vers $+\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$.

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

- En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée. Mais :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3 \ln x}{x} = x - 2 - \frac{2}{x} - \frac{3 \ln x}{x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln x}{x} = 0$ par croissances comparées. Donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b. On pose $u(x) = x^2 - 2x - 2 - 3 \ln x$ et $v(x) = x$.

On a alors $u'(x) = 2x - 2 - \frac{3}{x}$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{\left(2x - 2 - \frac{3}{x} \right) \times x - (x^2 - 2x - 2 - 3 \ln x) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x + 3 + 3 \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 + 3 \ln x}{x^2}$$

En posant $\theta(x) = x^2 - 1 + 3 \ln x$, on obtient bien le résultat voulu.

c. Pour $x > 0$, $\theta'(x) = 2x + \frac{3}{x} = \frac{2x^2+3}{x^2}$

Cette dérivée est positive pour tout $x > 0$, donc **θ est croissante sur $]0; +\infty[$**

d. $\theta(1) = 1^2 - 1 + 3 \ln 1 = 0$.

θ est croissante et s'annule en 1.

Ainsi $\theta(x)$ est **négatif sur $]0; 1]$ puis positif sur $[1; +\infty[$.**

e. Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $\theta(x)$.

On en déduit que **f est décroissante sur $]0; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$.**

Exemple 4

a. Le point M a pour coordonnées $(x; f(x))$. Ainsi, le rectangle $OPMQ$ a pour dimensions x et $f(x)$. Par conséquent :

$$A'(x) = x \times f(x) = x \left(2 - \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right) = 2x - x \ln \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \text{ et par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

Donc par différence, **$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = 0$.**

Ce n'était pas évident graphiquement, puisqu'on parle ici de l'aire d'un rectangle dont la longueur tend vers $+\infty$!

b. Un maximum ? Dès qu'il est question de trouver l'extremum d'une fonction, on sait qu'il va falloir la dériver. On fait attention à la composée $\ln \left(\frac{x}{2} \right)$.

Pour $x > 0$, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln \left(\frac{x}{2} \right)$. On a alors $u'(x) = 1$ et

$$v'(x) = \frac{1}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$$

Tiens, c'est la même dérivée que $\ln$. Ce n'est pas étonnant : pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, $\ln(kx) = \ln(x) + \ln(k)$, et $\ln(k)$ est une constante.

Ainsi, toute fonction de la forme $\ln(kx)$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$. Dans cet exercice, on est dans le cas $k = \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour $x > 0$:

$$A'(x) = 2 - \left(1 \times \ln \left(\frac{x}{2} \right) + x \times \frac{1}{x} \right) = 2 - \ln \left(\frac{x}{2} \right) - 1 = 1 - \ln \left(\frac{x}{2} \right)$$

Étudions le signe de $A'(x)$.

$$1 - \ln \left(\frac{x}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln \left(\frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow e^1 \geq \frac{x}{2} \Leftrightarrow x \leq 2e$$

Ainsi, **A est croissante sur $]0; 2e]$ puis décroissante sur $[2e; +\infty[$.**

Son maximum est donc atteint pour $x = 2e$.

Les coordonnées du point M sont alors $(2e; f(2e))$,

$$\text{or } f(2e) = 2 - \ln \left(\frac{2e}{2} \right) = 2 - \ln(e) = 2 - 1 = 1$$

Ainsi, **$M(2e; 1)$** . L'aire du rectangle est alors $2e \times 1 \approx 5,44$.

4. Autres applications

Puissances quelconques Soient a un réel strictement positif, et $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors calculer l'expression :

$$e^{n \times \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$$

Or dans l'expression initiale $e^{n \times \ln a}$, le nombre n aurait très bien pu être un réel. Ceci permet d'étendre l'opération « puissance » en **prenant un exposant réel plutôt qu'un entier**.

Ainsi, on définit pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$a^b = e^{b \times \ln a}$$

On peut mettre un réel strictement positif à n'importe quelle puissance, pas seulement des nombres entiers.

Par exemple, $10^{3,1} \approx 1\,259$. En particulier pour tout $a > 0$, $a^{0,5} = e^{0,5 \times \ln a} = e^{\ln \sqrt{a}} = \sqrt{a}$

Ainsi, prendre la racine carrée d'un nombre revient à le mettre à la puissance $\frac{1}{2}$. (de même pour $\sqrt[3]{}$ avec $\frac{1}{3}$, etc.)

Cela fournit aussi une explication à la convention $0^0 = 1$. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1$.

Logarithme de base a Soit $a > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ s'appelle la fonction **logarithme de base a** , notée **$\log_a$** .

La fonction $\log_a$ a exactement les mêmes propriétés algébriques que $\ln$ (transformation des produits en sommes, etc.) En prenant $a = e$, comme $\ln e = 1$, on retrouve que la fonction $\ln$ est le **logarithme de base e** .

Logarithme décimal Si maintenant, on prend $a = 10$, on définit la fonction $\log_{10} : x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$

C'est le logarithme de base 10, le plus utilisé : on l'appelle **logarithme décimal** et on le note **$\log$** tout court.

Son utilité principale est d'être la **réciproque de la puissance de 10**. En effet, pour $x > 0$:

$$\log(10^x) = \frac{\ln 10^x}{\ln 10} = \frac{x \ln 10}{\ln 10} = x$$

(notez que cela fonctionne pour tout logarithme de base $a > 0$: $\log_a$ est la réciproque de la puissance de a)

Ainsi, **la fonction $\log$ a les mêmes propriétés algébriques que $\ln$** , mais on a par exemple $\log(10\,000) = 4$

Elle est utilisée en chimie pour le pH , en physique pour les décibels dB , en économie pour les échelles logarithmiques. En particulier, si le $\log$ d'un nombre augmente de 2, cela signifie qu'il a été multiplié par 100.