

Correction de l'interrogation écrite sur la fonction $\ln$

Exercice 1 (4 pts)

1. (0,5 pt, 0 si non justifié) On résout l'équation $2x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -3$, donc f est définie sur $] -3; +\infty[$.

2. (1 pt) On a $\lim_{x \rightarrow -3} \ln(2x + 6) = -\infty$ par composition, donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$.

3. (0,5 pt)

$$f'(x) = 2x - 8 \times \frac{2}{2x + 6} = 2x - \frac{16}{2x + 6}$$

4. (0,5 pt) On écrit cette fonction dérivée sur le même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2x(2x + 6)}{2x + 6} - \frac{16}{2x + 6} = \frac{4x^2 + 12x - 16}{2x + 6} = \frac{4(x^2 + 3x - 4)}{2x + 6}$$

(0,5 pt) Le polynôme au numérateur a pour racines 1 et -4.

(0,5 pt) $2x + 6$ étant positif pour tout $x \in] -3; +\infty[$, $f'(x)$ est donc négatif sur $] -3; 1]$ puis positif sur $[1; +\infty[$.

f est donc décroissante sur $] -3; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$.

(0,5 pt) Son minimum est $f(1) = 1 - 8 \ln(8)$ (ou bien $1 - 24 \ln(2)$, si vous préférez)

Exercice 2 (6 pts)

1. (1 pt) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. On a donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(1 pt) Par produit, la limite en $+\infty$ est indéterminée.

On factorise par x :

$$f(x) = x \left(3 + \frac{1}{x} - 2 \ln(x) \right)$$

La parenthèse tend vers $-\infty$ par somme, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2a. (1 pt) On dérive en faisant attention au produit :

$$f'(x) = 3 - \left(2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} \right) = 3 - 2 \ln(x) - 2 = 1 - 2 \ln(x)$$

2b. (1 pt) La meilleure façon d'étudier le signe est de résoudre l'inéquation :

$$1 - 2 \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \ln(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \ln(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \geq x$$

Ainsi, $f'(x)$ est positif sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis négatif sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$

f est donc croissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$

(0,5 pt) Son extremum est :

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1$$

3a. (1 pt) La solution ne peut être que dans l'intervalle $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$. Sur cet intervalle, f est continue et strictement décroissante. De plus, on a $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 2e^{\frac{1}{2}} + 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, or $0 \in] -\infty; 2e^{\frac{1}{2}} + 1]$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

3b. (0,5 pt) f est donc positive sur $]0; \alpha]$ puis négative sur $[\alpha; +\infty[$.