

Correction des exercices faisant intervenir la fonction $\ln$

Exercice 1

1. Il s'agit de vérifier que pour tout x réel, $x^2 + 2x + 3$ est strictement positif.

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$

Ce discriminant est négatif, donc le polynôme n'a pas de racines et le terme en x^2 étant positif, le polynôme $x^2 + 2x + 3$ est strictement positif pour tout x réel. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Tout d'abord, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$. Ensuite, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x + 3$ est une forme indéterminée,

mais $x^2 + 2x + 3 = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$, et par produit, cette expression a pour limite $+\infty$ en $-\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 2x + 3) = +\infty$.

Enfin, par différence, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour x réel :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{(x^2 + 2x + 3) - (2x + 2)}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

4. Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif pour tout x réel comme montré en question 1, et $x^2 + 1$ est positif pour tout x réel. Ainsi, $f'(x)$ est positif sur tout $\mathbb{R}$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. *Ce n'est pas le TVI ici, qui ne sert qu'à résoudre des équations de la forme $f(x) = k$ où k est constant.*

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 2x + 3) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$$

Or le polynôme $x^2 + 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$ et donc pas de racine.

Donc l'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution.

Exercice 2

Partie A

1. a. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

- b. Le numérateur est un carré, qui s'annule pour $x = 1$ et qui est positif pour tout x . Le dénominateur est strictement positif pour tout x . Ainsi, $f'(x)$ est positif pour tout x et f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Le $2 \ln(x)$ peut nous inciter à factoriser par x^2 .

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln(x^2 + 1) \\ &= x - \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - \left(\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - 2 \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

3. Par somme, on a une forme indéterminée. Mais :

$$f(x) = x \left(1 - \frac{2 \ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln(x)}{x} = 1$,

puis par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2 \ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Ainsi par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

1. Initialisation : On a bien $u_0 = 7$, $u_1 = f(u_0) = f(7) = 7 - \ln(50) \approx 3,09$ et ainsi $u_0 \geq u_1 \geq 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$.

Alors en appliquant f qui est croissante sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(0)$.

Or $f(0) = 0 - \ln(0^2 + 1) = 0$.

Ainsi, $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq 0$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite ℓ .
3. La fonction f étant continue, d'après le théorème du point fixe, il suffit de résoudre l'équation :
- $$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell - \ln(\ell^2 + 1) = \ell \Leftrightarrow \ln(\ell^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$
4. En Python, la fonction $\ln$ se note « log », mais cet oubli n'était pas pénalisé au bac.

```
def seuil(h) :  
    n = 0  
    u = 7  
    while u > h :  
        n = n + 1  
        u = u - log(u*u + 1)  
    return n
```

En obtenant le tableau de valeurs à la calculatrice, on trouve que la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leq 0,01$ est $n = 97$.

Exercice 3

Partie A

1. $f'(1) = 3$, et $(T) : y = 3x - 4$
2. f semble concave sur $]0; 1]$ puis convexe sur $[1; +\infty[$.

Le point A semble être un point d'inflexion, car la courbe traverse la tangente en ce point.

Partie B

1. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) = +\infty$ par composition,

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \frac{x^2 \ln(x^2) - x}{x^2}$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x^2) = 0^-$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0^-$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ par quotient.

2. Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \ln(x^2) + \frac{1}{x^2} + 2$$

et

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3. a. Le signe de $f''(x)$ ne dépend que de

$(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ qui est négatif sur $]0; 1[$ puis positif sur $[1; +\infty[$.

f est concave sur $]0; 1]$ puis convexe sur $[1; +\infty[$.

- b. f' est donc décroissante sur $]0; 1[$ puis croissante sur $[1; +\infty[$, son minimum est donc :

$$f'(1) = \ln(1^2) + \frac{1}{1^2} + 2 = 3$$

Ainsi, $f'(x)$ est positif pour tout $x > 0$ et f est croissante.

4. a. f est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Sa limite en 0 est $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution.

- b. On trouve $\alpha \approx 1,33$ et

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Exercice 4

Partie A

1. a. • $\lim_{x \rightarrow 0} x - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln(x) = -\infty$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(x) = +\infty$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x + 1}{2x}$$

c. Pour tout $x > 0$, $(2x + 1)$ et $2x$ sont strictement positifs, donc $f'(x)$ est positif sur $]0; +\infty[$ et f est croissante sur cet intervalle.

2. a. f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $0 \in]-\infty; +\infty[$.

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0; +\infty[$.

De plus, $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \ln(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln(2) > 0$.

$f(1)$ étant négatif et $f(2)$ positif, donc α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

b. f est croissante et ne s'annule qu'en α , donc f est négative sur $]0; \alpha]$ puis positive sur $[\alpha; +\infty[$.

c. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 2 - \alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B

1. On fait bien attention au produit $-\frac{1}{4}x^2 \ln(x)$!

Pour $x \in]0; 1]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \left(\frac{1}{4} \times 2x \ln(x) + \frac{1}{4} x^2 \times \frac{1}{x} \right) \\ g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln(x) - \frac{1}{4}x \\ g'(x) &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln(x) \end{aligned}$$

Or :

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln(x) = g'(x)$$

2. a. Pour x appartenant à l'intervalle $]0; \frac{1}{\alpha}]$, alors $x < \frac{1}{\alpha}$, donc en appliquant la fonction inverse qui est décroissante, $\frac{1}{x} > \alpha$. Or sur $[\alpha; +\infty[$, f est positive, donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

b. Pour tout $x \in]0; 1]$, x est strictement positif, donc le signe de $g'(x)$ ne dépend que de $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or d'après la question précédente, pour x appartenant à l'intervalle $]0; \frac{1}{\alpha}]$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ est positif.

De même, pour x appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ est négatif.

Ainsi, $g'(x)$ est positif sur $]0; \frac{1}{\alpha}[$ puis négatif sur $]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$.

Donc g est croissante sur $]0; \frac{1}{\alpha}[$ puis décroissante sur $]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$.

Exercice 5

Partie A

3. Il semblerait que 1 soit solution de cette équation.
4. La tangente à C_g semble horizontale en 0,5, donc une solution pourrait être 0,5.

Partie B

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

2. a. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(g(x)) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) \\ &= -\ln(x^2) - \frac{1}{x} \\ &= -2 \ln x - \frac{1}{x} \\ &= -\frac{2x \ln x}{x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{-1 - 2x \ln x}{x} \end{aligned}$$

- b. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} -1 - 2x \ln x = -1$.

Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

- c. $h(x) = \ln(g(x))$ signifie que $g(x) = e^{h(x)}$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{h(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ par composition.}$$

3. g est un produit de la fonction carré inverse et d'une composée. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{x^3} \times e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} \\ g'(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) \\ g'(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) \\ g'(x) &= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - 2x}{x^4} \right) \end{aligned}$$

4. x^4 est positif pour tout x réel, $e^{-\frac{1}{x}}$ aussi. Le signe de g' ne dépend donc que de celui de $1 - 2x$.
Ainsi, g' est positif sur $[0; \frac{1}{2}]$ et négatif sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$,
et g est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$,
ce qui valide la conjecture de la partie A.

Exercice 6

Partie A

- On lit l'image $f(-1) = -2$, et le coefficient directeur de la tangente est $f'(-1) = 1$.
- La tangente justement, n'est pas en-dessous de la courbe sur tout $] -2; +\infty[$, donc f n'est pas convexe sur tout son ensemble de définition.
- Il semblerait qu'il n'y ait qu'une seule solution de cette équation, approximativement 0,1.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = x^2 + 2x - 1 = -1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 0$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -2} \ln(x + 2) = -\infty$.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$.

Cela signifie que la droite verticale d'équation $x = -2$ est asymptote à C_f .

2. Pour tout $x > -2$:

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{(2x+2)(x+2) + 1}{x+2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$$

3. Le dénominateur est strictement positif pour tout $x > -2$.

On calcule le discriminant du polynôme au numérateur : $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4$. Ce polynôme n'a pas de racines, il est positif pour tout x .

Ainsi f est croissante sur $] -2; +\infty[$.

4. On applique le corollaire du TVI. $\alpha \approx 0,12$.

5. f étant croissante, $f(x)$ est négatif sur $] -2; \alpha]$ puis positif sur $[\alpha; +\infty[$.

6. Oh non. Pour tout $x > -2$:

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

On calcule le discriminant du polynôme au numérateur : $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 7 = 8$

Les racines sont $\frac{-8-\sqrt{8}}{4}$, qui est hors de l'ensemble de définition, et $\frac{-8+\sqrt{8}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ce dernier nombre annule la dérivée seconde de f : c'est l'abscisse de son unique point d'inflexion.

Partie C

1. On utilise la formule de la distance entre deux points, sans la racine car $h(x) = JM^2$.

$$h(x) = JM^2 = (x-0)^2 + (g(x)-1)^2 = x^2 + (\ln(x+2)-1)^2$$

2. a. Le signe de f a été trouvé en question B5 et $x+2$ est positif pour $x > -2$.

Donc h est décroissante sur $] -2; \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

b. Ainsi, le minimum de la fonction h est atteint en α : c'est la valeur de x qui minimise JM .

3. a. Que sait-on sur α , déjà ? Ah oui : on sait que $f(\alpha) = 0$.

C'est-à-dire que $\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0$, soit $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b. • La tangente à C_g au point M_α d'abscisse α a pour coefficient directeur $g'(\alpha)$.

Or $g'(x) = \frac{1}{x+2}$, donc le coefficient directeur de la tangente est $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$

• La droite (JM_α) passe par $J(0; 1)$ et par $M_\alpha(\alpha; g(\alpha))$. Son coefficient directeur est :

$$\frac{g(\alpha) - 1}{\alpha - 0} = \frac{\ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = \frac{-\alpha(\alpha + 2)}{\alpha} = -(\alpha + 2)$$

• On calcule finalement le produit des deux coefficients directeurs : $-(\alpha + 2) \times \frac{1}{\alpha+2} = -1$

ce qui prouve le résultat demandé.

Exercice 7

1. La hauteur est l'ordonnée de M , mais la largeur est $2x$. Pour qu'elles soient égales, il faut que

$$\begin{aligned}2x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) \\ \Leftrightarrow 4x &= e^x + e^{-x} - 2 \\ \Leftrightarrow e^x + e^{-x} + 4x - 2 &= 0\end{aligned}$$

On trouve bien l'équation (E). La largeur ne peut être que strictement positive, donc il faut étudier ses solutions strictement positives.

2. a.

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 4x - 2 = x \times \frac{e^x}{x} - x \times 4 + e^{-x} - 2 = x \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$$

- b. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. On revient à l'expression initiale de f .

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$$

- b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} - 4 = 0$.

On multiplie tout par e^x :

$$\begin{aligned}e^x - e^{-x} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x(e^x - e^{-x} - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x \times e^{-x} - 4 \times e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 &= 0\end{aligned}$$

- c. Si on pose $X = e^x$, l'équation devient $X^2 - 4X - 1 = 0$ et c'est une équation du second degré.

Son discriminant est $(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$ et ses deux racines réelles sont :

$$X_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad X_2 = 2 - \sqrt{5}$$

mais X_2 est négatif, il ne reste que X_1 .

Cependant, on avait posé $X = e^x$, donc la solution vérifie $e^x = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{5})$.

4. (Le tableau de signes est donné directement. Pour le trouver, il aurait fallu dériver f' et montrer qu'elle est toujours croissante, mais le rédacteur a préféré faire travailler d'autres choses)

- a. f est donc décroissante sur $[0; \ln(2 + \sqrt{5})]$ et croissante sur $[\ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$.

On a $f(0) = e^0 + e^{-0} - 4 \times 0 - 2 = 0$,

et $f(\ln(2 + \sqrt{5}))$ n'a aucune chance de pouvoir s'exprimer simplement, mais est égal à environ $-3,3$, c'est ce qu'on peut écrire dans le tableau. On pense aussi à écrire la limite en $+\infty$.

- b. L'équation $f(x) = 0$ admet déjà 0 pour solution.

Sur l'intervalle $]0; \ln(2 + \sqrt{5})]$, elle n'admet pas de solution.

Ensuite, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln(2 + \sqrt{5}); +\infty[$.

et $f(\ln(2 + \sqrt{5})) < 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , qui est strictement positive et même supérieure à $\ln(2 + \sqrt{5})$.