Correction des exercices sur les propriétés algébriques de $\boldsymbol{ln}$

Exercice 1 a. $\ln 25 + \ln\sqrt{125} = 2\ln 5 + \frac{1}{2}\times 3\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$

b. $\ln 35 - \ln 175 = \ln 7 + \ln 5 - \ln 7 - \ln 25 = \ln 5 - 2\ln 5 = -\ln 5$

c. $\ln\left(\dfrac{e^4}{25}\right) = \ln e^4 - \ln 25 = 4 - 2\ln 5$

d. $e^{-\ln 5} - \ln(5e) = \frac{1}{e^{\ln 5}} - \ln 5 - \ln e = \frac{1}{5} - \ln 5 - 1 = -\frac{4}{5} - \ln 5$

Exercice 2 a. $3\ln 2 - \ln 9 + \ln 5 = \ln 8 - \ln 9 + \ln 5 = \ln\left(\frac{8}{9}\right) + \ln 5 = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$

b. $\ln 8 - 3\ln 4 + \ln\sqrt{2} = 3\ln 2 - 3\times 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = 3\ln 2 - 6\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{5}{2}\ln 2$

Exercice 3

a. $e^{2\ln 3+\ln 4} = e^{2\ln 3}\times e^{\ln 4} = \left(e^{\ln 3}\right)^2\times 4 = 3^2\times 4 = 36$

b. $e^{3\ln 2-\ln 4} = \frac{e^{3\ln 2}}{e^{\ln 4}} = \frac{\left(e^{\ln 2}\right)^3}{4} = \frac{2^3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

c. $\frac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}} = \frac{e^{\ln 6}\times e}{e^{\ln 9}\times e^2} = \frac{6\times e}{9\times e^2} = \frac{2}{3e}$

d. $\frac{e^{2\ln 5+\ln 3}}{e^{2\ln 3}} = \frac{\left(e^{\ln 5}\right)^2\times e^{\ln 3}}{\left(e^{\ln 3}\right)^2} = \frac{5^2\times 3}{3^2} = \frac{25}{3}$

Exercice 4

a. $2^{n-6} > 1\,000 \Leftrightarrow \ln(2^{n-6}) > \ln(1000) \Leftrightarrow (n-6)\ln 2 > 3\ln 10 \Leftrightarrow n-6 > \frac{3\ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow n > \frac{3\ln 10}{\ln 2} + 6$

Or $\frac{3\ln 10}{\ln 2} + 6 \approx 15{,}97$, donc $n \geq 16$.

b. $1 - 0{,}6^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow -0{,}6^n \geq -0{,}001 \Leftrightarrow 0{,}6^n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n\ln 0{,}6 \leq \ln(0{,}001) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)}$

Or $\frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)} \approx 13{,}52$ donc $n \geq 14$.

Exercice 5 La somme d'argent sur le compte d'Yzia peut se modéliser ainsi : $1\,000\times 0{,}95^n$ (c'est une suite géométrique de premier terme 1 000 et de raison 0,95).

$$1000\times 0{,}95^n < 500 \Leftrightarrow 0{,}95^n < 0{,}5 \Leftrightarrow n\ln 0{,}95 < \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95}$$

Or $\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}51$, donc c'est au bout de 14 mois qu'Yzia aura moins de 500€ sur ce compte.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow 1{,}5^n > 500\,000 \Leftrightarrow n\ln 1{,}5 > \ln 500\,000 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 500\,000}{\ln 1{,}5} \approx 32{,}36$$

C'est donc à partir du rang $n = 33$ que les termes de la suite seront supérieurs à un million.

Exercice 7

a. On remarque d'abord que cette inéquation est définie pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$\ln(x^2-1) \leq \ln(3) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 4$

Or $x^2 \leq 4$ a pour solutions dans les réels $[-2; 2]$. Mais l'inéquation n'est définie que sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

$S = [-2; -1[\cup]1; 2]$.

b. Cette équation est définie pour $x > 0{,}5$ et $x > 0$, donc pour $x \in]0{,}5; +\infty[$.

$\ln(2x-1) = 2\ln x \Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln(x^2) \Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

Cette équation a pour solution 1, qui est bien dans l'ensemble de définition. $S = \{1\}$.

Exercice 8

Cette équation n'est définie que pour $x > 10$ (ce qui élimine déjà **a** et **b**).

$\ln x + \ln(x-10) = \ln 3 + \ln 7 \Leftrightarrow \ln\big(x(x-10)\big) = \ln(21) \Leftrightarrow x(x-10) = 21 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 21 = 0$

Après calcul du discriminant et des racines, on constate que ce polynôme a deux racines $x_1 \approx -1{,}78$ et $x_2 \approx 11{,}78$. Mais l'équation n'est définie que sur $]10;+\infty[$, ce qui élimine x_1. Il ne reste que x_2. Réponse **c**.

Exercice 9 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x + \ln(1+e^{-x}) = \ln(e^x) + \ln(1+e^{-x}) = \ln\big(e^x(1+e^{-x})\big) = \ln(e^x+1)$.

Exercice 10 Pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right) = \ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Exercice 11 Pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$ch\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$$
$$= \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}{2}$$
$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1} + \dfrac{1}{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}}{2}$$
$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1} + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$
$$= \frac{\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$
$$= \frac{\dfrac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$
$$= \frac{\dfrac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$
$$= \frac{\dfrac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$
$$= \frac{\dfrac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}$$
$$= \frac{2x}{2}$$
$$= x$$