

Propriétés algébriques

Exercice 1 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 5$.

a. $\ln 25 + \ln \sqrt{125}$ b. $\ln 35 - \ln 175$ c. $\ln \left(\frac{e^4}{25} \right)$ d. $e^{-\ln 5} - \ln(5e)$

Exercice 2 a. Exprimer sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif, le nombre $3 \ln 2 - \ln 9 + \ln 5$.

b. Exprimer en fonction de $\ln 2$ le nombre $\ln 8 - 3 \ln 4 + \ln \sqrt{2}$.

Exercice 3 Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a. $e^{2 \ln 3 + \ln 4}$ b. $e^{3 \ln 2 - \ln 4}$ c. $\frac{e^{\ln 6 + 1}}{e^{\ln 9 + 2}}$ d. $\frac{e^{2 \ln 5 + \ln 3}}{e^{2 \ln 3}}$

Résolution d'équations d'inconnue entière en exposant

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes : a. $2^{n-6} > 1\,000$ b. $1 - 0,6^n \geq 0,999$

Exercice 5 Yzia possède 1 000 € sur un compte en banque.

Chaque mois, elle prélève 5% de la somme qui lui reste.

Au bout de combien de mois lui restera-t-il moins de 500 € sur son compte ?

Exercice 6 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{3}{2}$

À partir de quel rang n les termes de la suite sont-ils supérieurs à un million ?

Résolution d'équations d'inconnue réelle

Exercice 7 Résoudre les équations suivantes : a. $\ln(x^2 - 1) \leq \ln(3)$ b. $\ln(2x - 1) = 2 \ln x$

Exercice 8 On note (E) l'équation $\ln x + \ln(x - 10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue x .

Parmi les quatre propositions suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

- a. 3 est solution de (E) .
- b. $5 - \sqrt{46}$ est solution de (E) .
- c. L'équation (E) admet une unique solution réelle.
- d. L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Manipuler des expressions

Exercice 9 Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $\ln(e^x + 1) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

Exercice 10 Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Exercice 11 Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on définit la fonction ch « cosinus hyperbolique », par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Montrer que pour $x \in]1; +\infty[$ on a $ch(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) = x$.

La fonction ch et (comme on le démontre ici) sa réciproque la fonction $argch$ définie, pour tout $x > 1$, par $argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, sont deux fonctions de référence étudiées dans le supérieur.