

## Exercices faisant intervenir la fonction $\ln$

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x - \ln(x^2 + 2x + 3)$ .

1. Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la limite de  $f(x)$  en  $-\infty$ . On admettra pour la suite que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
3. Démontrer que pour tout  $x$  réel :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

4. En déduire les variations de  $f$ .
5. Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  n'admet aucune solution.

### Exercice 2

#### **Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

1. a. Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$$

- b. En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que pour tout nombre réel  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

3. En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

#### **Partie B : étude d'une suite**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq u_{n+1} \geq 0$ .
2. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .
3. On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .
4. a. Recopier et compléter le script ci-contre afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier  $n$  à partir de laquelle  $u_n \leq h$ , où  $h$  est un nombre réel strictement positif.  
b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

```
def seuil(h) :  
    n = 0  
    u = 7  
    while ... :  
        n = n + 1  
        u = ...  
    return n
```

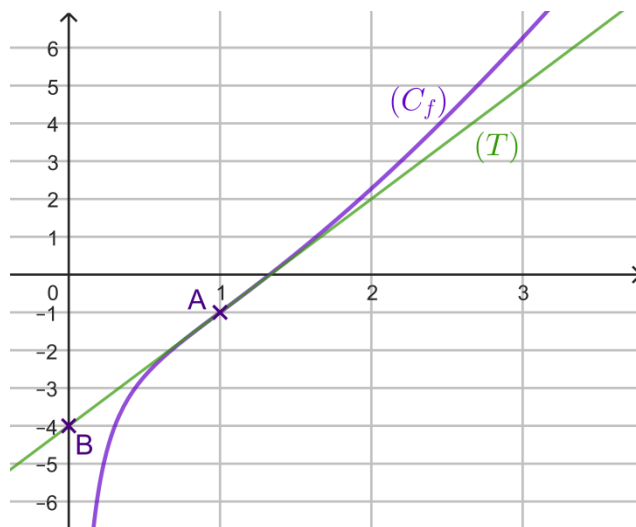
### Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}$$

#### Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous  $(C_f)$ , la courbe représentative de la fonction  $f$ , ainsi que  $(T)$ , la tangente à  $(C_f)$  au point  $A$  de coordonnées  $(1; -1)$ . Cette tangente passe également par le point  $B(0; -4)$ .



1. Lire graphiquement  $f'(1)$ , et donner l'équation réduite de la tangente  $(T)$ .
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  semble convexe ou concave.  
Que semble représenter le point  $A$  pour la courbe  $(C_f)$  ?

#### Partie B

1. Déterminer, en justifiant soigneusement, la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .  
Déterminer  $f'(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .  
Puis, montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3. a. Étudier la convexité de la fonction  $f$ .  
b. Étudier les variations de  $f'$ , puis le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .  
En déduire le sens de variation de  $f$ .
4. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près, et montrer que  $\alpha$  vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

## Exercice 4

### Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On se propose d'étudier la fonction  $f$  définie pour  $x > 0$  par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$$

1. a. Déterminer, en justifiant, les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- b. Montrer que pour tout  $x$  strictement positif, on a  $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$ .
- c. Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- d. Étudier la convexité de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
2. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0; +\infty[$  une solution unique que l'on notera  $\alpha$  et justifier que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[1; 2]$ .
- b. Déterminer le signe de  $f(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$ .
- c. Montrer que  $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$ .

### Partie B : étude de la fonction $g$

On définit la fonction  $g$  sur  $]0; 1]$  par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$$

1. Calculer  $g'(x)$  pour  $x \in ]0; 1]$  puis vérifier que  $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ .
2. a. Justifier que pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; \frac{1}{\alpha}[$ , on a  $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ .
- b. En déduire les variations de  $g$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ . Les images et les limites ne sont pas demandées.

## Exercice 5

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = e^{-x} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

On a représenté les courbes  $C_f$  et  $C_g$  ci-contre.

### Partie A : conjecture graphiques

1. Conjecturer une solution de l'équation  $f(x) = g(x)$ .
2. Conjecturer une solution de l'équation  $g'(x) = 0$ .

### Partie B : étude de la fonction $g$

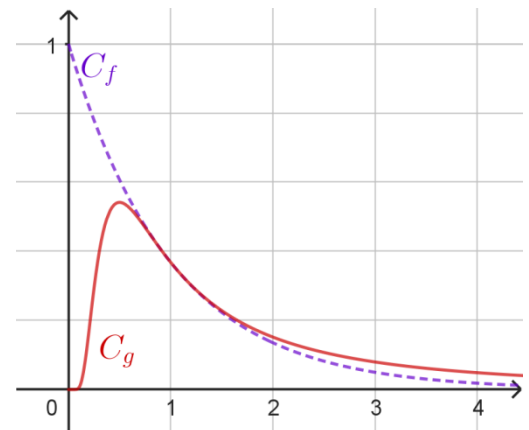
1. Calculer la limite de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. On admet que la fonction  $g$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = \ln(g(x))$ .

- a. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,  $h(x) = \frac{-1-2x \ln(x)}{x}$ .
- b. Calculer la limite de  $h(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
- c. En déduire la limite de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers 0.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  strictement positif :

$$g'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$$

4. En déduire les variations de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

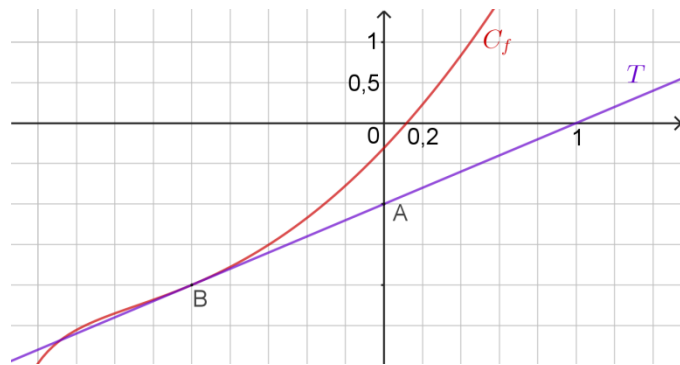


## Exercice 6

On considère une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $] -2; +\infty[$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative, et on a tracé ci-contre la courbe  $C_f$  et la tangente  $T$  au point  $B$  d'abscisse  $-1$ .

On précise que la droite  $T$  passe par le point  $A(0; -1)$ .



### Partie A : exploitation du graphique

On répondra aux questions de cette partie à l'aide du graphique.

1. Préciser  $f(-1)$  et  $f'(-1)$ .
2. La fonction  $f$  est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  et donner une valeur arrondie à  $10^{-1}$  près d'une solution.

### Partie B : étude de la fonction $f$

On considère que la fonction  $f$  est définie sur  $] -2; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$ .

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction  $f$  en  $-2$ .

Interpréter graphiquement ce résultat. On admettra pour la suite que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Montrer que pour tout  $x > -2$  :

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$$

3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction  $f$  sur  $] -2; +\infty[$ .
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $] -2; +\infty[$  et donner une valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
5. En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $] -2; +\infty[$ .
6. Montrer que  $C_f$  admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

### Partie C : une distance minimale

Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -2; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(x + 2)$ .

On note  $C_g$  sa courbe représentative, représentée ci-contre.

Soit  $M$  un point de  $C_g$  d'abscisse  $x$ .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de  $x$  la

distance  $JM$  est minimale, où  $J$  est le point de coordonnées  $(0; 1)$

On considère la fonction  $h$  définie sur  $] -2; +\infty[$  par  $h(x) = JM^2$ .

1. Justifier que pour tout  $x > -2$ , on a

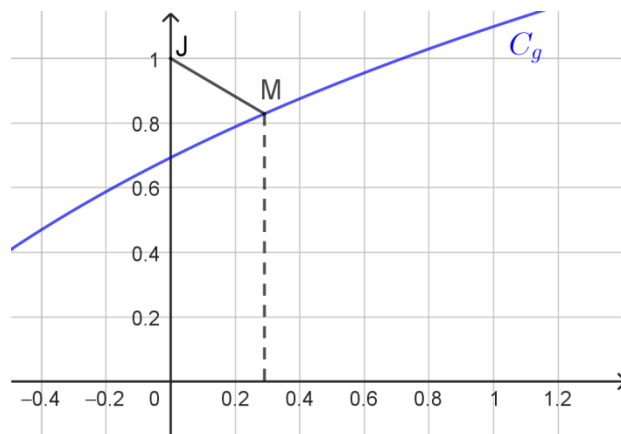
$$h(x) = x^2 + (\ln(x + 2) - 1)^2$$

2. On admet que la fonction  $h$  est dérivable sur  $] -2; +\infty[$  et que pour tout  $x > -2$  :

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

- a. Dresser le tableau de variations de  $h$ . Les limites ne sont pas demandées.
- b. En déduire que la valeur de  $x$  pour laquelle la distance  $JM$  est minimale est  $\alpha$ , où  $\alpha$  est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera  $M_\alpha$  le point de  $C_g$  d'abscisse  $\alpha$ .
  - a. Montrer que  $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$ .
  - b. En déduire que la tangente à  $C_g$  au point  $M_\alpha$  et la droite  $(JM_\alpha)$  sont perpendiculaires.

On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à  $-1$ .



### Exercice 7

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation

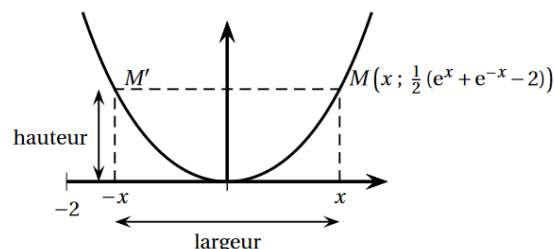
$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-contre.

On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points  $M$  et  $M'$  comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point  $M$  d'abscisse  $x$  strictement positive, afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation :

$$(E): e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$$

2. On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$ .

a. Vérifier que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$

b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3. a. Déterminer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

b. Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  équivaut à l'équation  $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$ .

c. En posant  $X = e^x$ , montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet pour unique solution réelle le nombre  $\ln(2 + \sqrt{5})$ .

4. On donne ci-contre le tableau de signes de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .

a. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

b. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive, que l'on notera  $\alpha$ .

|         |   |                     |           |
|---------|---|---------------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\ln(2 + \sqrt{5})$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0                   | +         |