Correction des exercices sur les limites en ∞ et asymptotes horizontales

Exercice 1 • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ce qui ne donne pas d'asymptote.

En revanche, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{1}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 1}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_g$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \mathbf{0}$ donc la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 0}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \mathbf{3}$ donc la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une deuxième asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 3}$.

Exercice 2 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + x + 1 = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\sqrt{x} = +\infty$ et par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\sqrt{x} + 1 = +\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \sqrt{x} = -\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{1-\sqrt{x}} = 0^+$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^x = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(1 - e^x) = -\infty$.

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} - 2 = -2$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{\frac{1}{x}-2} = -\infty$.

Correction des exercices sur les limites en un réel et asymptotes verticales

Exercice 1 **a.** La limite à gauche en -2 semble être $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$ et la limite à droite $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$.

Ainsi, la courbe admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = -2}$.

Seule la limite à gauche ou la limite à droit suffisait pour avoir l'asymptote.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{0}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 0}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui ne donne pas d'asymptote.

Exercice 2

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \mathbf{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \mathbf{0}$.

b. En 2, la limite à gauche est $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x) = +\infty$ et la limite à droite est $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} g(x) = -\infty$.

En 5, la limite à gauche est $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} g(x) = -\infty$ et la limite à droite est $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} g(x) = -\infty$.

Exercice 3 • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{-2}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = -2}$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = 0}$.

On aurait aussi pu utiliser la limite à droite.

• De même, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = 2}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{1}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 1}$.

Exercice 4

• $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 1}$ et une verticale d'équation $\boldsymbol{x = 0}$.

• $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = -1}$.

• $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote verticale d'équation $\boldsymbol{x = -1}$.

• $\mathcal{C}_k$ n'admet **pas d'asymptote**.

• $\mathcal{C}_p$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boldsymbol{y = 0}$.

charly-piva.fr