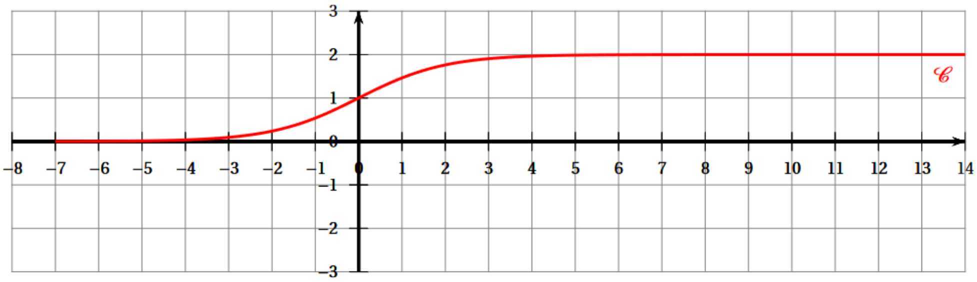
Exercices d’étude de fonction, sur les limites et la continuité

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en moins l’infini et interpréter graphiquement le résultat.

2. Montrer que la droite d’équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$.

3. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f, et vérifier que pour tout nombre réel x on a :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{e^x + 1}$$

4. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $I(0;1)$ et que sa tangente en ce point a pour coefficient directeur $0{,}5$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0{,}5\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax + b}{2x - 1}$$

où a et b sont deux réelles et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère. $\frac{1}{2}$

On sait de plus que $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

1. **a.** Déterminer a et b.

b. Montrer que $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{a+2b}{4x-2}$

2. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.

3. Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe.

4. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l’intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x + 2}$$

On admettra que f est dérivable sur l’intervalle $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que f est croissante sur l’intervalle $[0; +\infty[$.

2. Résoudre l’équation $f(x) = x$ sur l’intervalle $[0; +\infty[$. On note α la solution.
Donner la valeur exacte de α puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$, où α est le réel défini à la question **2.**

b. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in]2{,}1;2{,}2[$ tel que $g(\alpha)=0$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

3. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

2. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$:

$$f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. En déduire le tableau de variations de la fonction.

4. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$:

$$f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Montrer que f est une fonction paire.

2. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

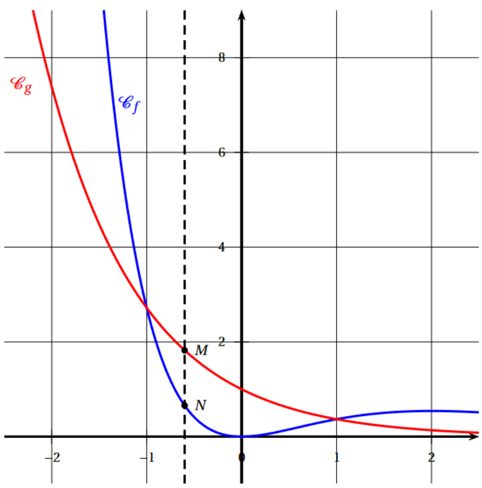
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. **a.** Montrer que pour tout $y\in]0;1]$, l'équation $f(x)=y$ a une unique solution α dans $[0;+\infty[$

b. Exprimer α en fonction de y.

Exercice 6

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$.



La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1;1]$, on considère les points M de coordonnées $(x;f(x))$ et N de coordonnées $(x;g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que $d(x)=e^{-x}-x^2e^{-x}$.

a. Montrer que $d'(x)=e^{-x}(x^2-2x-1)$.

b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1;1]$.

c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance M_0N_0.

3. Soit Δ la droite d'équation $y=x+2$. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{-x}-x-2$. En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x)=0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice 7

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$. On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.

c. Déterminer la limite de la suite (T_n).

4. On considère la fonction suivante `temp` écrite en langage Python :

```
def temp(x) :
  T = 80
  n = 0
  while T >= x :
    T = 0.8*T + 2
    n = n + 1
  return n
```

a. Quelle valeur numérique est renvoyée par l'appel `temp(40)` ?

b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice**.**

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - M)$$

1. Dans cette question, on choisit$M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.

a. Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(t) = \frac{\theta(t)}{e^{-0{,}2t}}$

Montrer que, pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, on a $f'(t) = 0$.

b. En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.

En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$

c. Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0; +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t , et que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$ on a : $g(t) = 10 + 70e^{-0{,}2t}$ où t est exprimé en minute et $g(t)$ en degré Celsius.

Une personne aime boire son café à 40 °C. Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0; +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$. Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

Exercice 8

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, par :

$$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+e^x)^2}$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 0$.
Déterminer le signe de la fonction g' sur $\mathbb{R}$.

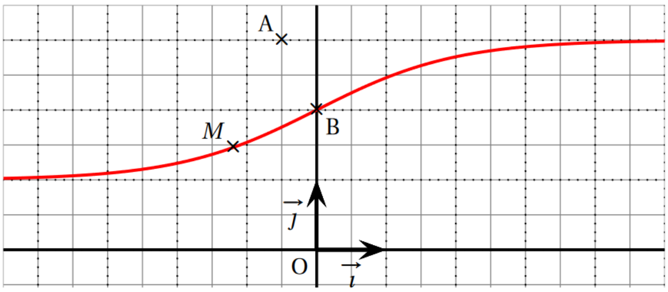
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g et calculer le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x}$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, représentée dans la figure ci-dessous. Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2};3\right)$.



1. Démontrer que le point $B(0;2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

2. Soit x un réel quelconque. On note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x; f(x))$.
Démontrer que $AM^2 = g(x)$.

3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la distance AM est minimale.

4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

  a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

  b. Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.
  Démontrer que l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.

5. Démontrer que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).