

## Correction des exercices centrés sur le TVI

### Exercice 1

1. Il s'agit de dériver un quotient.

Si pour tout  $t$  positif, on pose  $v(t) = 0,4 + 3,6e^{-0,5t}$ , alors  $v'(t) = -1,8e^{-0,5t}$ .

Ainsi, on a :

$$P'(t) = -\frac{1\,000 \times -1,8 \times e^{-0,5t}}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2} = \frac{1\,800e^{-0,5t}}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2}$$

On en déduit que la fonction  $P$  est croissante sur son ensemble de définition.

2. Par composition,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0$  donc ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 0,4 + 3,6e^{-0,5t} = 0,4$  par somme.

Enfin, par quotient,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{1\,000}{0,4} = 2\,500$ .

3. La fonction  $P$  est continue et strictement croissante, de plus,  $P(0) = 250$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 2\,500$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe alors un unique  $t_0$  positif tel que  $P(t_0) = 2\,000$ .

On trouve  $t_0 \approx 7,2$ .

### Exercice 2

1.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

On étudie le signe de  $f'(x)$  qui est un polynôme du second degré :

son discriminant est  $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 52$ . Ses racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{52}}{6} = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{3}$$

Ainsi,  $f'(x)$  est positif sur  $] -\infty; x_2]$ , puis négatif sur  $[x_2; x_1]$  et enfin positif sur  $[x_1; +\infty[$ .

Donc  $f$  est croissante sur  $] -\infty; x_2]$ , puis décroissante sur  $[x_2; x_1]$  et enfin croissante sur  $[x_1; +\infty[$ .

On ne demande pas le « tableau de variations », donc pas besoin de calculer les extremums (ouf !)

2. On a  $x_1 \approx 0,87$  donc l'intervalle  $[2; 3]$  est inclus dans l'intervalle  $[x_1; +\infty[$ , où  $f$  est strictement croissante.

On applique le corollaire du TVI sur  $[2; 3]$ .

$f$  est continue sur  $[2; 3]$ , on a  $f(2) = 1$  et  $f(3) = 21$  donc  $f(2) < 2 < f(3)$ .

De plus,  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc un réel  $k$  dans l'intervalle  $[2; 3]$  tel que  $f(k) = 2$ .

Ainsi, l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[2; 3]$ .

3. La calculatrice fournit  $x = 2,08$  (attention à l'arrondi, c'est en fait 2,0796 !)

4. Dans le début du programme, on a  $y = 1$  et  $x = 2$  car  $f(2) = 1$ . La variable  $y$  est donc censée contenir l'image de  $x$  par  $f$  et à chaque passage dans la boucle, on ajoute 0,01 à  $x$  jusqu'à ce que le résultat atteigne 2.

On aboutit donc au programme ci-contre.

```
def alpha() :  
    x = 2  
    y = 1  
    while y < 2 :  
        y = x**3 + x**2 - 4*x - 3  
        x = x + 0.01  
    return x
```

### Exercice 3

#### Partie A

1. Par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$ . Donc par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

2. Par produit, on aboutit à une forme indéterminée de type «  $\infty \times 0$  ». On essaie les croissances comparées :  
Pour tout  $x$  réel, :

$$g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2 = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = \frac{x}{e^{-x+4}} + 2e^{x-4} - 2$$

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  par croissances comparées, donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4}(xe^x) = 0$

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-4} = 0$  également.

On en déduit par somme que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$ .

3. Il s'agit surtout de dériver le produit. Pour tout  $x$  réel,

$$g'(x) = e^{x-4} + (x + 2)e^{x-4} = e^{x-4}(x + 3)$$

On en déduit que  $g$  est décroissante sur  $] - \infty; -3]$  puis croissante sur  $[-3; +\infty[$ . On a  $g(-3) = -e^{-7} - 2 \approx -2$

4. La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[-3; +\infty[$ .

De plus,  $g(-3) = -e^{-7} - 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe alors un unique réel  $\alpha$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

5. Ainsi,  $g$  est négative sur  $] - \infty; \alpha]$  puis positive sur  $[\alpha; +\infty[$ .

6. On trouve  $3,069 < \alpha < 3,070$ .

#### Partie B

1. Soit  $x$  réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x^2 e^{x-4} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(1 - e^{x-4}) &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit nul. Soit  $x^2 = 0$  et alors  $x = 0$ ,

soit  $1 - e^{x-4} = 0$  donc  $e^{x-4} = 1$  soit  $x - 4 = 0$  et  $x = 4$ .

Les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sont donc 0 et 4.

2. On étudie le signe de  $-xg(x)$ .

On trouve que cette expression est négative sur  $] - \infty; 0]$ , puis positive sur  $[0; \alpha]$  et enfin négative sur  $[\alpha; +\infty[$ . Ainsi,  $f$  est décroissante sur  $] - \infty; 0]$ , puis croissante sur  $[0; \alpha]$  et enfin décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .

3. Il s'agit en fait de calculer  $f(\alpha)$ . Le dénominateur nous incite à créer une fraction dont le dénominateur est  $(\alpha + 2)$ , ce qui peut nous faire penser au  $(x + 2)$  dans l'expression de  $g$ .

Et on sait que  $g(\alpha) = 0$ , essayons de nous en servir.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4} \\ &= \frac{(\alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4})(\alpha + 2)}{\alpha + 2} \\ &= \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4}(\alpha + 2)}{\alpha + 2} \\ &= \frac{\alpha^3 - \alpha^2(e^{\alpha-4}(\alpha + 2) - 2)}{\alpha + 2} \\ &= \frac{\alpha^3 - \alpha^2 g(\alpha)}{\alpha + 2} \\ &= \frac{\alpha^3}{\alpha + 2} \end{aligned}$$

**Exercice 4 1.** On pourrait penser qu'il faut appliquer le TVI, mais cela paraît étrange de le faire si tôt dans l'exercice. En fait, l'équation se résout directement, c'est pour ça qu'on demande « les solutions » et non pas « une valeur approchée des solutions » ou bien « le nombre de solutions » ou encore de « démontrer qu'il y a une unique solution ».

$$\begin{aligned} f(x) &= -4 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 4 &= -4 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit nul, on a donc soit  $x = 0$ , soit  $x^2 - 2x - 4 = 0$ . On étudie ce polynôme du second degré : son discriminant est  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20$ . Ses racines sont donc :

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{2 + \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

L'ensemble solution est donc  $S = \{0; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}\}$

**2.**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ . On a encore affaire à un polynôme du second degré, de discriminant  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 64$ . Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{6} = -\frac{2}{3}$$

On dresse le tableau de variations de  $f$  en incluant les extremums comme en 1<sup>ère</sup>, mais aussi les limites ! Pour le calcul des limites, on trouve une forme indéterminée par somme. Mais pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4 = x^3 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)$$

Par produit, on trouve alors que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

|         |           |                  |   |       |   |           |
|---------|-----------|------------------|---|-------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{2}{3}$   |   | $2$   |   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0                | - | 0     | + |           |
| $f$     | $-\infty$ | $-\frac{68}{27}$ |   | $-12$ |   | $+\infty$ |

**3.** On applique le corollaire du TVI (a.k.a. théorème de la bijection) sur  $] -\infty; -\frac{2}{3}]$

$f$  est continue sur  $] -\infty; -\frac{2}{3}]$ , on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{68}{27}$ .

De plus,  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc un réel  $k$  dans l'intervalle  $] -\infty; -\frac{2}{3}]$  tel que  $f(k) = -12$ .

On a de plus trouvé que  $f(-2) = -12$ . Ainsi,  $f(x) = -12$  admet exactement deux solutions sur  $\mathbb{R}$ .

**4.** Il n'existe pas de tel réel  $y$ , en effet  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , sa limite en  $-\infty$  est  $-\infty$ , sa limite en  $+\infty$  est  $+\infty$ , donc d'après le TVI, tout nombre admet au moins un antécédent par  $f$ .

**Exercice 5 1. a.** En  $-\infty$ , la limite est  $+\infty$  par somme.

La limite en  $+\infty$  était donnée dans l'énoncé, mais vous pouviez la trouver avec les croissances comparées.

Il s'agit d'une forme indéterminée, donc on factorise, ici par  $x$ . Pour  $x$  réel, on a :

$$f(x) = x \left( \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x} \right)$$

Or d'après les croissances comparées, la limite de  $\frac{e^x}{x}$  est  $+\infty$  en  $+\infty$ .

Par produit, on trouve que la limite de  $f(x)$  en  $+\infty$  est  $+\infty$ .

## Suite de la correction de l'exercice 5

1. b. Pour  $x$  réel,  $f'(x) = e^x - 1$ .

Cette expression n'étant ni une fonction affine, ni un polynôme, la seule façon d'étudier son signe est de résoudre l'inéquation :  $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$  car  $e^0 = 1$  et la fonction exp est croissante. Ainsi,  $f'(x)$  est négatif sur  $] - \infty; 0]$  puis positif sur  $[0; +\infty[$ . On en déduit les variations de  $f$ .

2. a. Pour être sûrs que  $f$  prend la valeur 0, au vu de son sens de variations et de ses limites, il faut d'abord connaître  $f(0)$ . Or  $f(0) = e^0 - 0 - 3 = -2$ .

On peut donc appliquer le théorème de la bijection une première fois sur  $] - \infty; 0]$  pour trouver  $\alpha$ , puis une deuxième fois (pas besoin de tout re-rédiger en entier) sur  $[0; +\infty[$  pour trouver  $\beta$ .

**Exercice 6 1.** La consigne a l'air intimidante, mais après tout, on nous demande de dériver  $f$ , ce qu'on sait faire.  $f$  est une somme de la fonction  $x$  avec une fraction, de la forme  $-2 \times \frac{1}{v}$  et on peut dériver la partie  $\frac{1}{v}$  avec la formule  $-\frac{v'}{v^2}$ . (On peut aussi considérer que cette fraction est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = -2$ ).

On pose pour tout  $x$  réel,  $v(x) = x^2 + 1$ . On a alors  $v'(x) = 2x$  et ainsi :

$$f'(x) = 1 - (-2) \times \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 1 + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Comme la consigne nous demande d'obtenir une grosse fraction à la fin, et que de toute façon pour étudier le signe de  $f'(x)$  il faudra l'écrire sous la forme d'une seule fraction, on met cette écriture au même dénominateur.

$$f'(x) = 1 + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 + 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

On a une expression développée au numérateur, mais on veut montrer que c'est égal à une expression factorisée.

Le plus simple est de repartir de l'expression factorisée, et de la développer.

Or pour tout  $x$  réel :

$$(x + 1)g(x) = (x + 1)(x^3 - x^2 + 3x + 1) = x^4 - x^3 + 3x^2 + x + x^3 - x^2 + 3x + 1 = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$$

On a bien démontré que :

$$f'(x) = \frac{(x + 1)g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

2. a. En remarquant que pour tout  $x$  réel :

$$g(x) = x^3 \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

on montre par produit que  $g(x)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , et vers  $-\infty$  en  $-\infty$ .

2. b. Pour tout  $x$  réel,  $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$ .

Ce polynôme du second degré a pour discriminant  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32$ .

Il n'a donc pas de racines : il est positif sur tout  $\mathbb{R}$ .  $g$  est donc croissante sur tout  $\mathbb{R}$ .

2. c. On applique le théorème de la bijection pour montrer l'existence de la solution.

De plus,  $g(-1) = -4$  et  $g(0) = 1$ , donc  $\alpha$  est bien comprise entre  $-1$  et  $0$ .

3. a. D'après les questions 2b et 2c., on sait que  $g(x)$  est négatif sur  $] - \infty; \alpha]$  puis positif sur  $[\alpha; +\infty[$ .

Le signe de  $f'(x)$ , justement, dépend de  $g(x)$ ... et de  $(x + 1)$  qu'il ne faut pas oublier dans le tableau de signes.

On en déduit que  $f'(x)$  est positif sur  $] - \infty; -1]$ , puis négatif sur  $[-1; \alpha]$  et enfin positif sur  $[\alpha; +\infty[$ .

3. b. On en déduit les variations de  $f$ , et on peut calculer l'extremum  $f(-1)$ .  $f(\alpha)$  est trop difficile à calculer.

Notez que les limites étaient données dans l'énoncé, mais elles étaient faciles à trouver, sans forme indéterminée.