Exercices centrés sur le TVI

Exercice 1

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang. Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$
où t est le temps écoulé depuis 2018, en années :

$$P(t) = \frac{1000}{0{,}4 + 3{,}6e^{-0{,}5t}}$$

1. Étudier les variations de la fonction P sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0;+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2\,000$.
Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 3$.
1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
3. Chercher une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une calculatrice (arrondir à $0{,}01$ près).
4. Compléter le programme Python ci-contre afin qu'il renvoie une valeur approchée de α à $0{,}01$ près.
*On rappelle qu'en Python, la puissance s'écrit avec deux symboles *.*
Par exemple, x^3 s'écrit `x**3`.

```
def alpha() :
  x = 2
  y = 1
  while ... :
    y = ...
    x = x + ...
  return ...
```

Exercice 3

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$.
1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Montrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} du réel α.
Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$.
1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$, où g est la fonction définie dans la partie **A**. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0;+\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.

Attention, ici ce n'est pas un TVI : on attend que vous trouviez les valeurs exactes de la solution. Il faut donc la résoudre avec les autres techniques que vous connaissez.

2. Dresser le tableau de variations de f.

3. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.

4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 3$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$. *On admet que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$.

b. Vérifier que $\beta \in [1; 2]$ puis déterminer un encadrement de β au dixième.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2 + 1}$$

1. Démontrer pour tout réel que :

$$f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

où $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

2. **a.** Calculer les limites de la fonction g en $\pm\infty$.

b. Déterminer les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in [-1; 0]$.

d. Donner un encadrement à 10^{-3} près de α.

3. **a.** Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, puis déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Dresser le tableau de variations de la fonciton f.