

Correction du devoir surveillé sur les limites et la continuité, sujet A

Exercice 1 (5 pts)

a. (0,5 pt) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - \frac{1}{x} = +\infty$

b. (0,5 pt) Par somme, c'est une forme indéterminée, mais $x^5 + 7x^2 = x^5(1 + \frac{7}{x^3})$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5(1 + \frac{7}{x^3}) = -\infty$ par produit.

c. (1 pt) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} + 3 = +\infty$.

d. (1 pt, l'absence de mention du théorème des gendarmes n'est pas pénalisée)

Pour x non nul, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, puis $-2 \leq 2 \cos(x) \leq 2$ et $-\frac{2}{x^2} \leq \frac{2 \cos(x)}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$.

Or la limite en $+\infty$ des deux membres de gauche et de droite est 0,

donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos(x)}{x^2} = 0$

e. (1 pt, 0,5 si faute de signe)

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x^3 - 5 = 8 - 5 = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$. Par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^3 - 5}{x - 2} = -\infty$.

f. (1 pt) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2 + 1} = 0$.

Exercice 2 (5 pts)

a. (1 pt, 0,5 si faute de signe) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3e^x = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - e^x = 0^-$ donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

(0,5 pt) On en déduit que C_f admet une **asymptote verticale d'équation $x = 0$** .

b. (1 pt) Par quotient, on aboutit à une forme indéterminée. Mais :

$$\frac{3e^x}{1 - e^x} = \frac{e^x \times 3}{e^x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)} = \frac{3}{\frac{1}{e^x} - 1}$$

Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

c. (1 pt) On dérive f qui est un quotient :

$$f'(x) = \frac{3e^x(1 - e^x) - 3e^x \times (-e^x)}{(1 - e^x)^2} = \frac{3e^x(1 - e^x + e^x)}{(1 - e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1 - e^x)^2}$$

Cette dérivée est strictement positive pour tout x , donc f est **strictement croissante sur $]0; +\infty[$** .

d. (1,5 pt, -0,5 par item • manquant)

- f est continue sur son ensemble de définition,
 - f est également strictement croissante,
 - $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$, et $-5 \in]-\infty; -3]$.
 - D'après le théorème de la bijection,
- l'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution.

Exercice 3 (10 pts)

1. a. (1 pt) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$.

1. b. (1 pt) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées, donc en passant à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.

(0,5 pt) La courbe C_f possède une **asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 0$** .

2. (0,5 pt) On dérive f comme un produit : $f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$

3.

(0,5 pt) Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $(1 - x)$: positif sur $] - \infty; 1]$ puis négatif sur $[1; +\infty[$.

(0,5 pt) f est donc **croissante sur $] - \infty; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$** .

(0,5 pt, à inclure dans le tableau) On a $f(1) = 1e^{-1} = e^{-1}$ ou $\frac{1}{e}$.

4. a. (1,5 pt, -0,5 par item • manquant)

- f est continue sur $[1; +\infty[$,
- f est également strictement décroissante
- $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, et $0,2 \in [0; e^{-1}]$.
- D'après le théorème de la bijection,

l'équation $f(x) = 0,2$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

4. b. (0,5 pt) Un petit coup de calculatrice nous donne $\alpha \approx 2,543$

Attention, il faut ignorer l'autre solution (environ 0,259) sur $] - \infty; 1]$.

5. (1 pt) On dérive f' , à nouveau comme un produit :

$$f''(x) = -1e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-1 - 1 + x) = e^{-x}(x - 2)$$

(0,5 pt) Le signe de $f''(x)$ ne dépend que de $(x - 2)$: négatif sur $] - \infty; 2]$ puis positif sur $[2; +\infty[$.

Ainsi, f est **concave sur $] - \infty; 2]$ puis convexe sur $[2; +\infty[$** .

6. a. (1 pt) Au point d'abscisse a , l'équation de la tangente T_a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$\text{soit } y = ((1 - a)e^{-a})(x - a) + ae^{-a}$$

$$\text{On développe le } (x - a) : y = ((1 - a)e^{-a})x - a(1 - a)e^{-a} + ae^{-a}$$

$$\text{et on développe le } (1 - a) : y = ((1 - a)e^{-a})x - ae^{-a} + a^2e^{-a} + ae^{-a}$$

$$\text{Ainsi, } y = ((1 - a)e^{-a})x + a^2e^{-a}.$$

b. (0,5 pt) $g(a)$ est l'ordonnée de H_a qui est un point de la droite T_a , mais aussi de l'axe des ordonnées.

Son abscisse x est 0. En reprenant l'équation de la tangente T_a pour $x = 0$, on trouve $g(a) = y = a^2e^{-a}$.

c. (0,5 pt) En considérant que g est une fonction de variable a , on la dérive :

$$g'(a) = 2ae^{-a} + a^2 \times (-e^{-a}) = e^{-a}(2a - a^2) = ae^{-a}(2 - a)$$

La dérivée s'annule pour $a = 2$, donc g admet un maximum pour $a = 2$.

Il s'agit bien de **l'abscisse du point d'inflexion de la courbe C_f** , comme démontré en 5.