

Chapitre 2 – Dérivation : composées, convexité et tangentes

1. Rappels sur la dérivation

Nombre dérivé Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

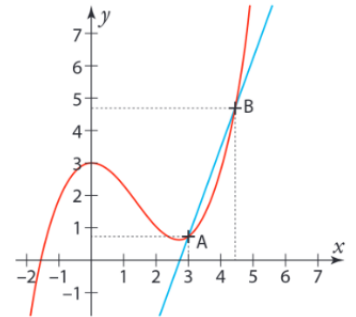
f est dérivable en un réel $a \in I$ si la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0.

On note cette limite $f'(a)$, et on l'appelle le **nombre dérivé de f en a** .

Tangentes Le nombre dérivé est en fait la **limite du taux d'accroissement** de f quand on calcule ce taux entre a et un autre nombre $(a + h)$ qui se rapproche de plus en plus de a .

Pour cette raison, **le nombre dérivé $f'(a)$ est en fait le coefficient directeur de la tangente**.

L'équation de droite de la tangente à C_f en a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Fonction dérivée En calculant les nombres dérivés pour tout $x \in I$, on définit une fonction f' qui s'appelle la dérivée de f .

f est croissante sur I si et seulement si sa dérivée f' est positive sur I .

Le **signe de la dérivée f'** permet donc de **déterminer les variations de f** .

De plus, si **f' s'annule en changeant de signe** en un réel $a \in I$, alors f admet un **extremum local** en a .

Nom	La fonction f telle que	a pour dérivée f' telle que	sur l'ensemble
Constante	$f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
Identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x) = mx + p$, où $m, p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
Carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
Puissance	$f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Puissance inverse	$f(x) = \frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées Soient deux fonctions u et v dérivable, et $e \in \mathbb{R}$. (Pour les quotients, on suppose que v ne s'annule pas)

la dérivée de **ku** est **ku'**

la dérivée de **$u + v$** est **$u' + v'$**

la dérivée de **$u - v$** est **$u' - v'$**

la dérivée de **uv** est **$u'v + uv'$**

la dérivée de **$\frac{1}{v}$** est **$-\frac{v'}{v^2}$**

la dérivée de **$\frac{u}{v}$** est **$\frac{u'v - uv'}{v^2}$**

Dérivabilité Les fonctions obtenues par opérations sur des fonctions dérivables sont elles-mêmes dérivables.

Pour démontrer qu'une fonction est dérivable, il suffit généralement de **dire que c'est une somme/produit/quotient de fonctions dérivables**. De plus, **tous les polynômes** et toutes les fractions rationnelles (les quotients de polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

2. Fonctions composées

2a. Définition

Définition : soit u une fonction définie sur un intervalle I , et à valeurs dans un intervalle J . Soit v une fonction définie sur l'intervalle J .

On note alors $v \circ u$ la fonction composée, définie sur I par :

$$v \circ u : x \mapsto v(u(x))$$

Exemple 1 Dans chaque cas, donner l'expression de la fonction $v \circ u$ en précisant son ensemble de définition.

a. $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x^4$ b. $u(x) = 4x - 10$ et $v(x) = \frac{1}{x^2}$ c. $u(x) = x^2 - 9$ et $v(x) = x\sqrt{x}$

Exemple 2 Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition, et donner le schéma de composition de f .

Cela signifie qu'il faut donner deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

a. $f(x) = (x + 2)^3$ b. $f(x) = \sqrt{2x^3 - 16}$ c. $f(x) = 1 - (e^x)^2$ d. $f(x) = \frac{x^7}{x^7 + 1}$

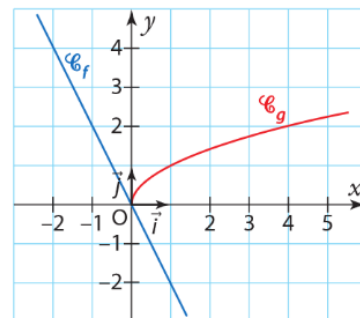
Exemple 3 a. A l'aide du graphique ci-contre, déterminer $g \circ f(-2)$ et $f \circ g(1)$.

$f \circ g(-1)$ et $g \circ f(1)$ existent-ils ? Justifier.

Exemple 4 Avec les tableaux ci-dessous, déterminer $f \circ g(1)$.

x	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+
Variations de g		$0 \rightarrow +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty \rightarrow \frac{1}{e}$		$\frac{1}{e} \rightarrow +\infty$



Remarques : Soient u , v et w trois fonctions.

- La composition de fonctions est associative : $(w \circ v) \circ u = w \circ (v \circ u)$
- La composition de fonctions n'est **pas commutative** : en général, $v \circ u \neq u \circ v$

Exemple 5 Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 1 + x$. Donner l'expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exemple 1 a. u et v sont définies sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $v \circ u$ l'est aussi.

$$v \circ u(x) = (3x - 1)^4$$

b. u est définie sur $\mathbb{R}$, mais v n'est pas définie en 0.

$v \circ u$ n'est définie que là où u ne s'annule pas. Or $4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$.

Ainsi, $v \circ u$ est définie sur $] - \infty; 2,5[\cup]2,5; +\infty[$, qui s'écrit aussi $\mathbb{R} \setminus \{2,5\}$.

$$v \circ u(x) = \frac{1}{(4x - 10)^2}$$

c. u est définie sur $\mathbb{R}$, mais v n'est définie que sur $[0; +\infty[$.

$v \circ u$ n'est définie que là où u prend des valeurs positives.

Or $x^2 - 9$ n'est positif que si $x \geq 3$ ou $x \leq -3$.

Ainsi, $v \circ u$ est définie sur $] - \infty; -3] \cup [3; +\infty[$ et $v \circ u(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}$

On pense bien à remplacer les deux x de l'expression de v par $x^2 - 9$.

Exemple 2

Notez que dans chaque cas, on pouvait répondre que $v(x) = x$ et $u(x) = f(x)$. On dit que la fonction identité, qui à x associe x , est « l'élément neutre » de la composition : composer une fonction avec la fonction identité ne la change pas.

a. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f = v \circ u$ avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x^3$.

b. f est définie pour x vérifiant $2x^3 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 \geq 16 \Leftrightarrow x^3 \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ainsi, f est définie sur $[2; +\infty[$ et $f = v \circ u$ avec $u(x) = 2x^3 - 16$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

c. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f = v \circ u$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 - x^2$.

d. $x^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = -1 \Leftrightarrow x = -1$.

Donc f est définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$

et $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^7$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.

Exemple 3

• D'après le graphique, $f(-2) = 4$, donc $g \circ f(-2) = g(4) = 2$.

$g(1) = 1$, donc $f \circ g(1) = f(1) = 2$.

• **$g(-1)$ n'existe pas**, donc $f \circ g(-1)$ ne peut pas exister.

$f(1) = -2$ mais **$g(-2)$ n'existe pas**, donc $g \circ f(1)$ n'existe pas.

Exemple 4

D'après le tableau de variations de g , $g(1) = 0$.

Donc $f \circ g(1) = f(0) = \frac{1}{e}$ d'après le tableau de variations de f .

Exemple 5

$g \circ f(x) = 1 + x^2$ et $f \circ g = (1 + x)^2$.

2b. Dérivée des fonctions composées

Propriété : si u et v sont deux fonctions dérivables telles que $v \circ u$ peut être définie, alors $v \circ u$ est dérivable et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$. Autrement dit, pour tout réel x tel que $v(u(x))$ existe,

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

La démonstration est assez abstraite et se base sur les notions de limite de fonction et de continuité, qui ne sont étudiées que plus tard dans l'année.

Exemple 1 Calculer les dérivées des fonctions f définies ci-dessous sur l'ensemble où elles sont définies. On pourra décomposer les fonctions afin de faire apparaître les composées.

a. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$

b. $f(x) = \cos(x^2) + 3x$

c. $f(x) = (-x + 1)e^{3x}$

Propriété (Monotonie d'une fonction composée)

- Si v et u sont de même monotonie (c'est-à-dire toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors la fonction $v \circ u$ est croissante.
- Si v et u sont de monotonie contraire (c'est-à-dire l'une croissante et l'autre décroissante), alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.

Remarque Si u est une fonctions dérivable et a et b deux réels, la fonction $f: x \mapsto v(ax + b)$ a pour dérivée $f': x \mapsto a \times v'(ax + b)$

Exemple 2 Déterminer le sens de variation des fonctions f définies ci-dessous sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = e^{-2x+5}$

b. $f(x) = (3x - 10)^8$

Exemple 1

a. Le schéma de composition de f est $u(x) = 2x^2 - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

On a alors $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi :

$$f'(x) = 4x \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 3}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 - 3}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 3}}$$

b. Le schéma de composition de la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ est $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin(x)$. Ainsi :

$$f'(x) = 2x \times (-\sin(x^2)) + 3 = -2x \sin(x^2) + 3$$

c. Ici, f est avant tout un produit $u \times v$.

On pose $u(x) = -x + 1$ et $v(x) = e^{3x}$.

On a alors $u'(x) = -1$ et v est une fonction composée : $v'(x) = 3 \times e^{3x} = 3e^{3x}$.

D'où $f'(x) = -1 \times e^{3x} + (-x + 1) \times 3e^{3x} = e^{3x}(-1 + 3(-x + 1)) = e^{3x}(2 - 3x)$

Exemple 2

a. On pose $v(x) = e^x$, on a $v'(x) = e^x$ également. Ainsi, $f'(x) = -2e^{-2x+5}$.

L'exponentielle étant toujours positive, $f'(x)$ est négatif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. On pose $v(x) = x^8$. On a alors $v'(x) = 8x^7$.

Donc $f'(x) = 3 \times 8(3x - 10)^7 = \mathbf{24(3x - 10)^7}$

L'exposant 7 étant impair, le signe de $f'(x)$ est celui de $(3x - 10)$.

$$3x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 10 \Leftrightarrow x \geq \frac{10}{3}$$

Donc $f'(x)$ est négatif sur $] -\infty ; \frac{10}{3}]$ puis positif sur $[\frac{10}{3} ; +\infty[$.

Ainsi, f est décroissante sur $] -\infty ; \frac{10}{3}]$ puis croissante sur $[\frac{10}{3} ; +\infty[$.

2c. Composées usuelles

Propriété : Soit u une fonction dérivable, a et b des réels, et n entier naturel.

Fonction	Dérivée
$au + b$	au'
u^2	$2u'u$
u^3	$3u'u^2$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

Fonction	Dérivée
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$

Exemple 1 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes. L'ensemble de définition n'est pas à préciser.

$$f_1(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right) \quad f_2(x) = \left(\frac{x-2}{x+7}\right)^3 \quad f_3(x) = 2e^{\sqrt{4x-3}} + 1$$

Exemple 2 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x+2} + \frac{1}{x}$$

Donner l'ensemble de définition de f , puis déterminer ses variations.

Exemple 1 • On pose $u(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{x} = \frac{1}{2}x - 3 \times \frac{1}{x}$.

On a alors $u'(x) = \frac{1}{2} - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}$. Ainsi, avec la formule $-u' \sin(u)$:

$$f_1'(x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)$$

• On pose $u(x) = \frac{x-2}{x+7}$. Cette fonction est un quotient, on cherche sa dérivée.

$$u'(x) = \frac{1(x+7) - 1(x-2)}{(x+7)^2} = \frac{9}{(x+7)^2}$$

Ainsi, en appliquant la formule $3u'u^2$:

$$f_2'(x) = 3 \times \frac{9}{(x+7)^2} \times \left(\frac{x-2}{x+7}\right)^2 = \frac{27(x-2)^2}{(x+7)^4}$$

• On pose $u(x) = \sqrt{4x-3}$, qui est elle-même une fonction composée !

$$u'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

Ainsi, en n'oubliant pas le 2 dans l'expression de f_3 , et la formule $(e^u)' = u'e^u$:

$$f_3'(x) = 2 \times \frac{2}{\sqrt{4x-3}} e^{\sqrt{4x-3}} = \frac{4}{\sqrt{4x-3}} e^{\sqrt{4x-3}}$$

Exemple 2

- Soit $u(x) = 4x + 2 + \frac{1}{x}$

On doit étudier son signe, et on l'écrit pour cela au même dénominateur.

$$u(x) = \frac{4x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 + 2x + 1}{x}$$

Le numérateur est un polynôme, de discriminant $\delta = 2^2 - 4 \times 4 \times 1 = -12$

Ce discriminant est négatif, donc le polynôme est du signe de 4, c'est-à-dire positif sur tout $\mathbb{R}$.

Le dénominateur est x , donc négatif sur $] - \infty; 0]$ puis positif sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, u est négatif sur $] - \infty; 0[$, pas défini en 0, puis positif sur $]0; +\infty[$.

Donc $f = \sqrt{u}$ est **définie sur $]0; +\infty[$** .

- On dérive u et on écrit sa dérivée sous la forme d'une fraction. Pour $x > 0$:

$$u'(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2}$$

Ainsi, en appliquant la formule de dérivation de $\sqrt{u}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{4x^2 - 1}{x^2}}{2\sqrt{4x + 2 + \frac{1}{x}}} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2\sqrt{4x + 2 + \frac{1}{x}}}$$

Quelle horreur. Heureusement, les carrés et les racines sont positifs pour tout x .

Il suffit donc d'étudier le signe de $4x^2 - 1$.

On peut l'étudier comme un polynôme, mais on peut aussi utiliser l'identité remarquable : $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x + 1)(2x - 1)$

Or pour $x > 0$, $(2x + 1)$ est positif, et $(2x - 1)$ est négatif sur $]0; 0,5]$ puis positif sur $[0,5; +\infty[$.

Donc f est **décroissante sur $]0; 0,5]$ puis croissante sur $[0,5; +\infty[$** .

3. Fonctions convexes

3a. Définition

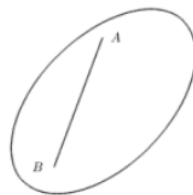
Définition (Segment dans le plan) : Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ du plan.

Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M(x_M; y_M)$ tels qu'il existe un réel $t \in [0; 1]$ tel que :

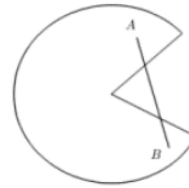
$$\begin{cases} x_M = tx_A + (1 - t)x_B \\ y_M = ty_A + (1 - t)y_B \end{cases}$$

Définition (Parties convexes du plan) : Soit $\wp$ une partie du plan.

$\wp$ est dite **convexe** si pour tous points A et B de $\wp$, le segment $[AB]$ est inclus dans $\wp$.



Convexe ☺

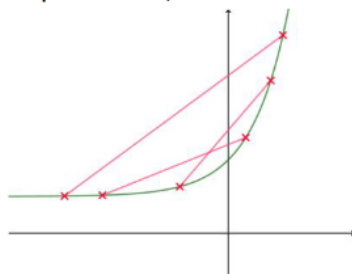


Non convexe ☹

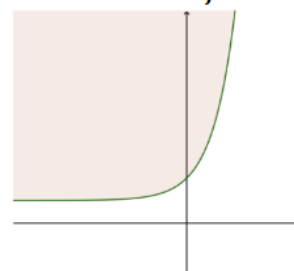
Définition (Fonction convexe) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.

Si pour tous points A et B de C_f , le segment $[AB]$ est au-dessus de C_f , alors on dit que f est convexe sur I .

Remarque : De façon équivalente, cela veut dire que la partie du plan au-dessus de C_f est une partie convexe.



Tous les segments sont **au-dessus** de C_f .
 f est donc **convexe**.

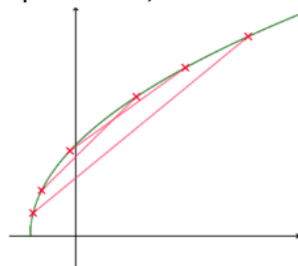


La partie du plan **au-dessus** de C_f
est convexe.

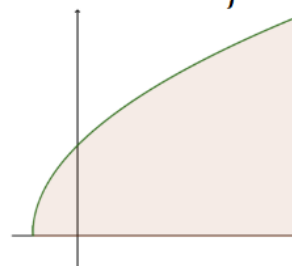
Définition (Fonction concave) :

Si pour tous points A et B de C_f , le segment $[AB]$ est en-dessous de C_f , alors on dit que f est concave sur I .

Remarque : De façon équivalente, cela veut dire que la partie du plan en-dessous de C_f est une partie convexe.



Tous les segments sont **en-dessous** de C_f .
 f est donc **concave**.

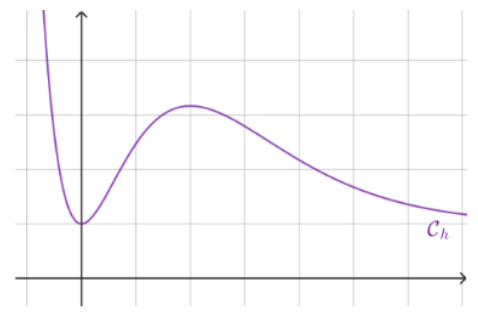
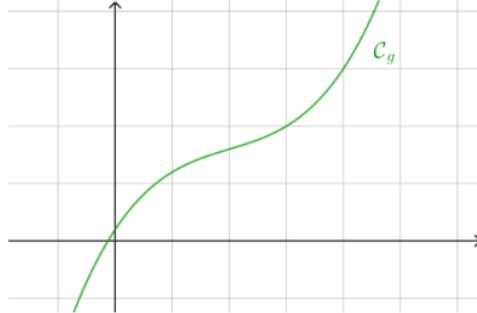
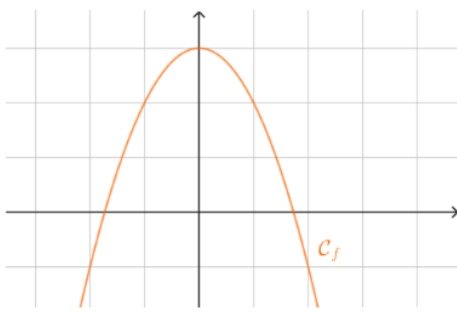


La partie du plan **en-dessous** de C_f
est convexe.

Remarque : f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I .

Exemple 1 On a représenté trois fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$.

Sur quels intervalles semblent-elles convexes ou concaves ?



Exemple 2 Quelle semble être la convexité des fonctions usuelles suivantes ?

- a. fonction carré b. fonction racine c. fonction cube d. fonction inverse e. fonction exponentielle

Exemple 1

- f semble être **concave sur** $\mathbb{R}$
- g semble être **concave sur** $] - \infty; 2]$ puis **convexe sur** $[2; +\infty[$
- h semble être **convexe sur** $] - \infty; 1]$, **concave sur** $[1; 3]$ et enfin **convexe sur** $[3; +\infty[$.

Exemple 2

- a. La fonction carré semble **convexe sur** $\mathbb{R}$.
- b. La fonction racine semble **concave sur** $[0; +\infty[$.
- c. La fonction cube semble **concave sur** $] - \infty; 0]$ puis **convexe sur** $[0; +\infty[$
- d. La fonction inverse semble **concave sur** $] - \infty; 0[$ puis **convexe sur** $]0; +\infty[$
- e. La fonction exponentielle semble **convexe sur** $\mathbb{R}$.

3b. Dérivées successives

Définition : Si une fonction f est dérivable plusieurs fois, on note :

- f'' ou $f^{(2)}$ sa dérivée seconde (la dérivée de la dérivée)
- $f^{(3)}, f^{(4)} \dots$ les dérivées successives

Exemple 1 Déterminer les dérivées seconde des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4x - 2)e^{-x+1} \quad g(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

Exemple 2 Déterminer toutes les dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^3$

Exemple 1 *On pense bien à factoriser les dérivées obtenues.*

- f est un produit. On pose $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = e^{-x+1}$.

On a alors $u'(x) = 4$ et par composition, $v'(x) = -e^{-x+1}$. Ainsi :

$$f'(x) = 4e^{-x+1} + (4x - 2) \times (-e^{-x+1}) = e^{-x+1}(4 - 4x + 2) = e^{-x+1}(6 - 4x)$$

f' est encore un produit. On pose à nouveau $u(x) = 6 - 4x$ et $v(x) = e^{-x+1}$.

On a alors $u'(x) = -4$ et $v'(x) = -e^{-x+1}$.

$$f''(x) = -4e^{-x+1} + (6 - 4x) \times (-e^{-x+1}) = e^{-x+1}(-4 - 6 + 4x) = e^{-x+1}(-10 + 4x)$$

- g est un quotient de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = 1 + e^x$. On a alors $v'(x) = e^x$.

$$g'(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

g' est aussi un quotient, cette fois de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = -e^x \text{ et } v(x) = (1 + e^x)^2$$

On a donc $u'(x) = -e^x$ et par composition avec la fonction carré,

$v'(x) = 2e^x(1 + e^x)$. Ainsi :

$$g''(x) = \frac{-e^x(1 + e^x)^2 - (-e^x) \times 2e^x(1 + e^x)}{((1 + e^x)^2)^2}$$

On remarque que l'on peut factoriser le numérateur par $(1 + e^x)$.

$$g''(x) = \frac{(1 + e^x)(-e^x(1 + e^x) + 2(e^x)^2)}{(1 + e^x)^4}$$

Ensuite, on peut simplifier par $(1 + e^x)$: le $(1 + e^x)^4$ devient alors $(1 + e^x)^3$.

$$g''(x) = \frac{-e^x - e^{2x} + 2e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

$$g''(x) = \frac{-e^x + e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

Exemple 2 On a $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$, puis $f''(x) = 12x^2 + 6x$, puis $f^{(3)}(x) = 24x + 6$, puis $f^{(4)}(x) = 24$ et enfin $f^{(5)}(x) = 0$. Les autres dérivées successives sont donc égales à **la fonction nulle**.

3c. Convexité et dérivée seconde

Propriété : Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I . Alors on a les équivalences suivantes :

- f est convexe $\Leftrightarrow f'$ est croissante $\Leftrightarrow f''$ est positive
- f est concave $\Leftrightarrow f'$ est décroissante $\Leftrightarrow f''$ est négative

Exemple 1 Dans chaque cas, les tableaux concernent une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Sur quels intervalles f est-elle convexe ?

a.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
Variations de f'				

b.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
Signe de $f''(x)$	-	0	+	0	-
Variations de f'					

c.

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f'			

Exemple 2 Étudier la convexité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b. $h(x) = x^2 e^{2x} - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exemple 3 Étudier la convexité des fonctions définies dans les exemples précédents.

$$f(x) = (4x - 2)e^{-x+1} \quad g(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

Exemple 1

a. f est convexe sur $] -\infty; -2] \cup [3; +\infty[$

b. f est convexe sur $[0; 1]$

c. f est convexe sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$

Exemple 2 À nouveau, il faut bien factoriser les dérivées seconde.

a. $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$ et $f''(x) = 2x - 3$

On dresse le tableau de signes de $f''(x)$, et on trouve que f est **concave** sur $] -\infty; 1,5]$ puis **convexe** sur $[1,5; +\infty[$.

b. On dérive h comme un produit (le -1 est une constante, sa dérivée est 0).

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{2x}$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.

$$h'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \times 2e^{2x} = 2e^{2x}(x + x^2)$$

On dérive à nouveau h' comme un produit :

on pose $u(x) = 2e^{2x}$ et $v(x) = x + x^2$. Ainsi $u'(x) = 4e^{2x}$ et $v'(x) = 1 + 2x$.

$$h''(x) = 4e^{2x}(x + x^2) + 2e^{2x}(1 + 2x)$$

$$= e^{2x}(4x + 4x^2 + 2 + 4x)$$

$$= e^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$$

Le signe de $h''(x)$ ne dépend que du polynôme $(4x^2 + 8x + 2)$.

Son discriminant est $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times 2 = 32$ et donc ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{32}}{2 \times 4} = \frac{-8 - 4\sqrt{2}}{8} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On dresse le tableau de signes de $h''(x)$, en se servant du signe du terme en x^2 .
Ainsi, h est **convexe sur** $] - \infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et **concave sur** $[x_1; x_2]$.

Exemple 3

a. On avait montré que $f''(x) = e^{-x+1}(-10 + 4x)$.

Le signe de cette dérivée seconde ne dépend que de $(-10 + 4x)$, qui est négatif sur $] - \infty; 2,5]$ puis positif sur $[2,5; +\infty[$.

Ainsi, f est **concave sur** $] - \infty; 2,5]$ puis **convexe sur** $[2,5; +\infty[$.

b. On avait trouvé :

$$g''(x) = \frac{-e^x + e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

Le dénominateur est positif, donc le signe ne dépend que du numérateur.

On essaie de le factoriser.

$$-e^x + e^{2x} = e^x(-1 + e^x)$$

Le signe ne dépend donc que de $(-1 + e^x)$. On résout une inéquation :

$$-1 + e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Donc $g''(x)$ est négatif sur $] - \infty; 0]$ puis positif sur $[0; +\infty[$.

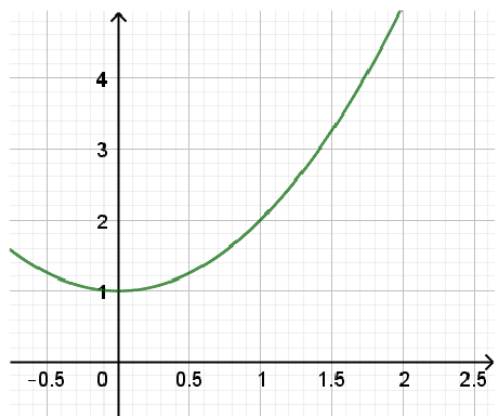
Ainsi, f est **concave sur** $] - \infty; 0]$ puis **convexe sur** $[0; +\infty[$.

4. Tangentes et points d'inflexion

4a. Équation de la tangente

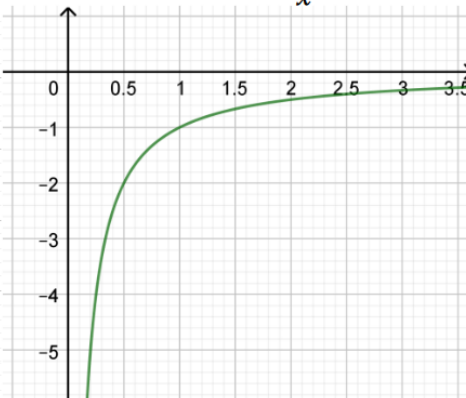
Pour chaque fonction, donner les équations et tracer les tangentes aux valeurs de a données.

$$f(x) = x^2 + 1$$



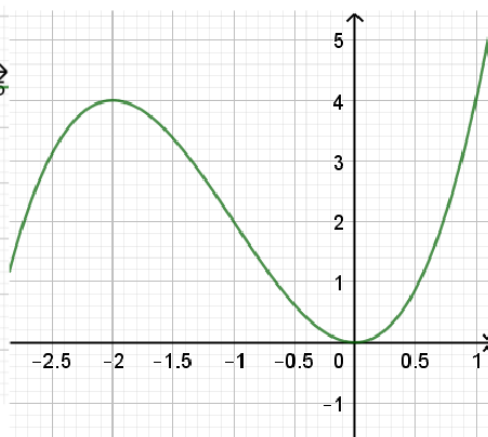
$a = 0$ et $a = 1$

$$g(x) = -\frac{1}{x}$$



$a = 0,5$ et $a = 1$

$$h(x) = x^3 + 3x^2$$



$a = -2$, $a = -1$ et $a = 0$

On applique la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

N'oubliez pas qu'à chaque fois, le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé.

- On a $f'(x) = 2x$.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y' = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 0x + 1 \Leftrightarrow y = 1 : \text{elle est horizontale.}$$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y' = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 2x.$$

- On a $g'(x) = \frac{1}{x^2}$.

La tangente au point d'abscisse 0,5 a pour équation :

$$y' = g'(0,5)(x - 0,5) + g(0,5) \Leftrightarrow y = 4(x - 0,5) - 2 \Leftrightarrow y = 4x - 4$$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y' = g'(1)(x - 1) + g(1) \Leftrightarrow y = 1(x - 1) - 1 \Leftrightarrow y = x - 2.$$

- On a $h'(x) = 3x^2 + 6x$.

La tangente au point d'abscisse -2 a pour équation :

$$y' = h'(-2)(x + 2) + h(-2) \Leftrightarrow y = 0(x + 2) + 4 \Leftrightarrow y = 4 : \text{elle est horizontale.}$$

La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation :

$$y' = h'(-1)(x + 1) + h(-1) \Leftrightarrow y = -3(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = -3x - 1$$

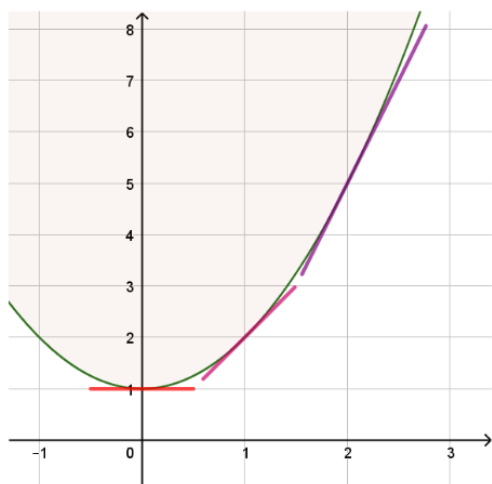
La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y' = h'(0)(x + 0) + h(0) \Leftrightarrow y = 0x + 0 \Leftrightarrow y = 0 : \text{elle est horizontale.}$$

4b. Convexité et tangentes

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .

f est **convexe** si et seulement si sa courbe est **au-dessus de toutes ses tangentes**.



Ci-contre, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ est **convexe** : sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes.

Remarque : on peut utiliser le fait qu'une fonction soit convexe ou concave pour en déduire sa position par rapport à ses tangentes, et en déduire des inégalités.

Exemple 1 En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tout réel x , $1 + x \leq e^x$

Exemple 2 En utilisant la concavité de la fonction racine carrée, montrer que pour tout réel positif x , $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x + 1)$

Exemple 1

La tangente en 0 à la courbe de la fonction exp admet pour équation :

$$y = e^0(x - 0) + e^0 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Or la fonction exp est **convexe**, donc sa courbe est au-dessus de cette tangente.

Ainsi, pour tout x réel, $e^x \geq x + 1$.

Exemple 2

La tangente en 1 à la courbe de la fonction racine admet pour équation :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{1}}(x - 1) + \sqrt{1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

Or la fonction racine est **concave**, donc sa courbe est en-dessous de cette tangente. Ainsi, pour tout x réel, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x + 1)$.

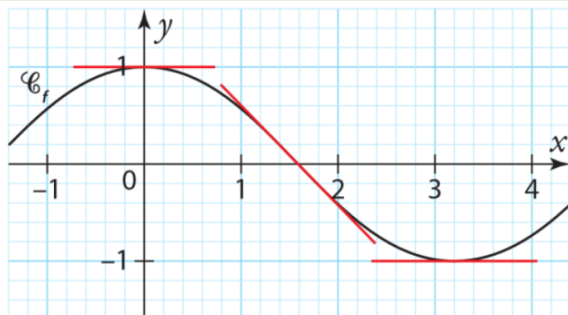
4c. Point d'inflexion

Définition : Soit A un point de C_f .

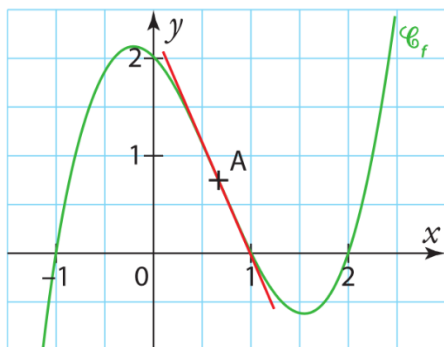
On dit que A est un **point d'inflexion** si la courbe C_f de f traverse sa **tangente** en A .

Exemple Dans chaque cas, on a représenté une fonction f . **a.**

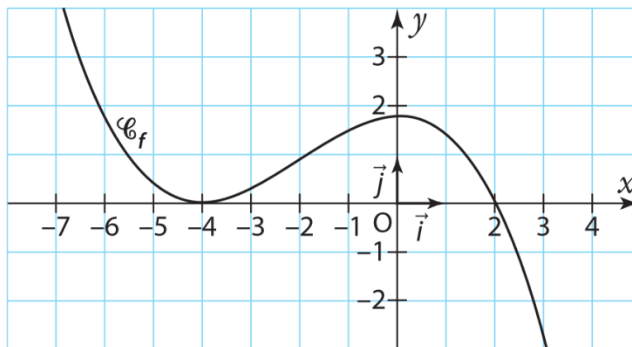
Déterminer les coordonnées de ses points d'inflexion, et les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.



b.



c.



a. f semble concave sur $] - \infty; 1,5]$ puis convexe sur $[1,5; +\infty[$.

Sa courbe semble admettre un point d'inflexion de coordonnées $(1, 5; 0)$.

b. f semble concave sur $] - \infty; 0,6]$ puis convexe sur $[0,6; +\infty[$.

Sa courbe semble admettre un point d'inflexion de coordonnées $(0, 6; 0, 7)$.

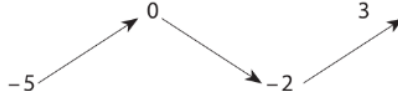
c. f semble convexe sur $] - \infty; -2]$ puis concave sur $[-2; +\infty[$.

Sa courbe semble admettre un point d'inflexion de coordonnées $(-2; 1)$.

Propriété : Il y a un **point d'inflexion** si et seulement si :

- f'' change de signe
- f' change de variation
- f **change de convexité** (elle passe de convexe à concave, ou inversement)

Exemple 1 On donne le tableau de variations de f' , dérivée d'une fonction f définie sur $[-3,1]$.

x	-3	-2	0	1
Variations de f'				

Sur quels intervalles f est-elle convexe ou concave ? Donner les abscisses de ses points d'inflexion.

Exemple 2 Soit f la fonction définie sur $[-5,7]$ par $f(x) = (x - 2,5)e^{0,4x}$

Sur quels intervalles f est-elle convexe ou concave ? Donner les coordonnées de son point d'inflexion.

Exemple 3 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = 4\sqrt{x} + 3x$.

Donner les coordonnées de son point d'inflexion éventuel.

Exemple 1 f semble convexe sur $] - 3; -2]$, concave sur $[-2; 0]$ et enfin convexe sur $[0; 1]$. Sa courbe admet deux points d'inflexion, d'abscisses -2 et 0 .

On ne connaît pas l'ordonnée de ces points d'inflexion, car on ne dispose pas de $f(-2)$ et $f(0)$: le tableau de variation dont on dispose est celui de f' , pas de f .

Exemple 2 $f'(x) = 1e^{0,4x} + (x - 2,5) \times (0,4e^{0,4x}) = 0,4xe^{0,4x}$

Attention, f' est aussi un produit :

$$f''(x) = 0,4e^{0,4x} + 0,4x \times 0,4e^{0,4x} = 0,4e^{0,4x}(1 + 0,4x)$$

Le signe de cette dérivée seconde ne dépend que de $(1 + 0,4x)$.

Ainsi, f est **concave sur** $] - \infty ; -2,5]$ puis **convexe sur** $[-2,5 ; +\infty[$.

Son point d'inflexion a pour abscisse **$-2,5$**

et pour ordonnée $f(-2,5) = (-2,5 - 2,5)e^{0,4 \times (-2,5)} = 5e^{-1}$.

Exemple 3

$$g'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3$$

On dérive g' comme un quotient de la forme $\frac{1}{v}$ (la constante 3 a pour dérivée 0) :

$$g'(x) = 2 \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -2 \times \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-1}{x\sqrt{x}}$$

Or sur $]0; +\infty[$, cette fonction est de signe négatif.

g est donc convexe sur $]0; +\infty[$ et sa courbe n'admet **pas de point d'inflexion**.