Correction des exercices sur les dérivées des fonctions composées et la convexité

Exercice 1

a. On lit $f(1) = 3$, et le coefficient directeur de la tangente donne $f'(1) = 2$

b. f semble convexe sur $]-\infty; 1]$ puis concave sur $[1; +\infty[$

c. La courbe semble traverser la tangente en 1, donc le point d'inflexion de f a pour coordonnées $(1; 3)$

Exercice 2

1. Le coefficient directeur de la tangente correspond à $f'(0)$.
On lit sur le graphique (attention à la graduation) que $f'(0) = 0{,}4$.

2. f' semble décroissante sur $]-\infty; -2]$ puis croissante sur $[-2; 1]$ et enfin décroissante sur $[1; +\infty[$.

3. Ainsi, f est convexe sur $[-2; 1]$.

4. La fonction f' semble négative sur $]-\infty; -0{,}5]$ puis positive sur $[-0{,}5; +\infty[$.
Ainsi, f semble décroissante sur $]-\infty; -0{,}5]$ puis croissante sur $[-0{,}5; +\infty[$.

Exercice 3

A. f est convexe sur un intervalle si et seulement si $f''(x)$ est positif pour tout x de cet intervalle.
Or d'après le graphique, f'' n'est pas positive sur $[-3; 3]$. La réponse A est <u>fausse</u>.

B. f admet un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annulle, or elle s'annule bien trois fois : en -3, en 2 et en 5. La réponse B est <u>vraie</u>.

C. f' est décroissante sur l'intervalle [0; 2] si et seulement si f'' est à valeurs négatives sur cet intervalle.
Or sur [0; 2], f'' est positive. La réponse C est <u>fausse</u>.

Exercice 4

1. On lit sur le graphique que $f(0) = 2$.
Pour $f'(0)$, on lit le coefficient directeur de la tangente, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-0} = -\frac{2}{2} = -1$$

2. f semble convexe sur $[0; +\infty[$: en particulier, sa courbe est au-dessus de la tangente (AB) sur cet intervalle.

3. On pose pour x réel : $u(x) = x + 2$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{-x}$ donc $v'(x) = -e^{-x}$. Ainsi :

$$f'(x) = 1e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} - 2e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 2) = e^{-x}(-x-1)$$

4. Le signe ne dépend que de $(-x-1)$, qui est positif sur $]-\infty; -1]$ et négatif sur $[-1; +\infty[$.
Ainsi, f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$.
On calcule l'extremum : $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = 1e^1 = e \approx 2{,}7$.

5. On dérive f', à nouveau comme un produit.

$$f''(x) = -e^{-x}(-x-1) + e^{-x} \times (-1) = xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} = xe^{-x}$$

6. Le signe de cette dérivée seconde ne dépend que de x : négatif sur $]-\infty; 0]$ et positif sur $[0; +\infty[$.
Ainsi, f est bien convexe sur $[0; +\infty[$.

Exercice 5

1a. La fonction est de la forme $v \circ u$ avec $u(x) = 4e^{-x} + 1$, qui a pour dérivée $u'(x) = -4e^{-x}$ et $v(x) = x^3$, qui a pour dérivée $v'(x) = 3x^2$

On applique la formule de la dérivée d'une composée : $f'(x) = -4e^{-x} \times 3(4e^{-x} + 1)^2$

1b. Un carré et une exponentielle sont toujours positifs, mais ils sont multipliés par -4.

$f'(x)$ est donc toujours négatif et f' est décroissante.

b. g est définie ssi $x^3 \geq -8$, donc ssi $x \geq -2$, donc sur $[-2; +\infty[$

Il s'agit d'une fonction composée, on dérive sur $]-2; +\infty[$: $g'(x) = 3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x^3+8}}$

Exercice 6

a. Il s'agit, à chaque fois, de calculer la dérivée d'un produit, en factorisant par e^x. Pour x réel :

$f'(x) = -10xe^x + (-5x^2 + 5)e^x = (-5x^2 - 10x + 5)e^x$

et $f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x = (-5x^2 - 10x - 10x + 5 - 10)e^x$

$= (-5x^2 - 20x - 5)e^x = -5(x^2 + 4x + 1)e^x$

b. $x^2 + 4x + 1$ est un polynôme de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12$

Il a pour racines $x_1 = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}$

Le signe de $f''(x)$ est l'opposé de celui du polynôme (à cause du -5 en facteur), donc on forme le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. Les abscisses des points d'inflexion sont donc $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

Exercice 7

A1. La concentration initiale semble être de 2 $g.L^{-1}$

A2. La concentration devient inférieure à $0{,}5g.L^{-1}$ à partir d'environ 8 heures.

A3. Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse 6 (le graphique ne permet pas de faire mieux)

B1. Pour $x \in [0; 10]$, $C'(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}04x - 0{,}1$

Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = (-0{,}04)^2 - 4 \times 0{,}003 \times (-0{,}1) = 0{,}0016 + 0{,}0012 = 0{,}0028$

Il a pour racines $x_1 = \frac{0{,}04+\sqrt{0{,}0028}}{0{,}006} \approx 15$ et $x_2 = \frac{0{,}04-\sqrt{0{,}0028}}{0{,}006} \approx -2$ qui sont hors du domaine de définition (ouf).

$C'(x)$ estdonc négatif sur $[0; 10]$ et C est donc toujours décroissante sur cet intervalle.

B2. On continue la dérivation : $C''(x) = 0{,}006x - 0{,}04$

Cette fonction s'annule pour $x = \frac{0{,}04}{0{,}006} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ qui est l'abscisse de son point d'inflexion.

C est concave sur $[0; \frac{20}{3}]$ et convexe sur $[\frac{20}{3}; 10]$

C1. Le médicament n'est plus actif à partir de 7,70 h.

C2. La baisse de la concentration ralentit à partir d'environ 6,67 heures, c'est le moment à partir duquel la fonction C devient convexe.