Correction des exercices sur la notion de fonction composée

Exercice 1

1. Donner le schéma de composition, c'est identifier les fonctions u et v telles que $f(x) = v\big(u(x)\big)$, autrement dit identifier la fonction « de l'intérieur » u et la fonction « de l'extérieur » v.
Ici, en posant $\boldsymbol{u(x) = -x + 3}$ et $\boldsymbol{v(x) = x^4}$, on a bien $f(x) = v\big(u(x)\big)$.

2. Les deux fonctions u et v sont définies sur $\mathbb{R}$, donc f est **définie sur** $\mathbb{R}$.

Exercice 2

$g \circ f(1) = g\big(f(1)\big)$. Or $f(1) = \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ puis $\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\circ\, \boldsymbol{f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$f \circ g(3) = f\big(g(3)\big)$. Or $g(3) = \frac{1}{3}$ puis $f(1) = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$. Donc $\boldsymbol{f \circ g(3) = \sqrt{\frac{4}{3}}}$ (ou $\frac{2}{\sqrt{3}}$ si vous préférez)

Exercice 3

1. On pose $\boldsymbol{u(x) = x^2 - 8x + 15}$ et $\boldsymbol{v(x) = \sqrt{x}}$. On a bien $f(x) = v\big(u(x)\big)$.

2. La racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs. Il faut donc étudier le signe du polynôme $u(x)$.
Son discriminant est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 15 = 64 - 60 = 4$.
Ses racines sont $x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{4}}{2\times1} = 5$ et $x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{4}}{2\times1} = 3$.
Le signe de $a = 1$ étant positif, on peut dresser le tableau de signe de $u(x)$ et établir qu'il est positif sur $]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$. Ainsi, f est **définie sur** $\boldsymbol{]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[}$.

Exercice 4

On lit $f(2) = 4$ puis $g(4) = 2$. Ainsi, $\boldsymbol{g \circ f(2) = 2}$.
On lit $g(2) = 1$ puis $f(1) = 1$. Ainsi, $\boldsymbol{f \circ g(2) = 1}$.

Correction des exercices sur les dérivées des composées usuelles

Exercice 1

a. D'après le tableau des composées, la dérivée d'une fonction de la forme e^u est $u'e^u$.
Pour x réel, on pose $u(x) = 4x^3 + x$. Sa dérivée est $u'(x) = 12x^2 + 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boldsymbol{f'(x) = (12x^2 + 1)e^{4x^3+x}}$. On n'oublie pas la parenthèse de $u'(x)$!
b. La dérivée d'une fonction de la forme $\cos(u)$ est $-u' \times \sin(u)$.
Pour x réel, on pose $u(x) = 3x^2 + 1$. Sa dérivée est $u'(x) = 6x$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boldsymbol{f'(x) = -6x \times \sin(3x^2 + 1)}$.
c. La dérivée d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$ est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
Pour x réel, on pose $u(x) = 8x - 3$. Sa dérivée est $u'(x) = 8$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{8}{2\sqrt{8x-3}} = \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{8x-3}}}$ après simplification.
d. Il s'agit ici d'un produit entre $u(x) = x^2$ qui a pour dérivée $u'(x) = 2x$
et $v(x) = e^{3x+1}$ qui est une fonction composée et qui a pour dérivée $v'(x) = 3e^{3x+1}$ d'après la formule.
Ainsi, $f'(x) = 2x \times e^{3x+1} + x^2 \times 3e^{3x+1} = \boldsymbol{2xe^{3x+1} + x^2e^{3x+1}}$
On peut ensuite factoriser pare^{3x+1} : $f'(x) = e^{3x+1}(2x + x^2)$ puis par x : $f'(x) = \boldsymbol{xe^{3x+1}(2 + x)}$.
e. La dérivée d'une fonction de la forme u^5 est $5u'u^4$.
Si on pose $u(x) = 3e^{-2x} + 1$, on a alors $u'(x) = 3 \times (-2e^{-2x}) = -6e^{-2x}$ (u contient elle-même une composée).
Ainsi, $f'(x) = 5 \times (-6e^{-2x}) \times (3e^{-2x} + 1)^4 = \boldsymbol{-30e^{-2x}(3e^{-2x} + 1)^4}$

Exercice 2

1. Il s'agit d'un produit, et l'un des facteurs est une composée.
On pose pour tout t positif, $u(t) = t^2 + 20t$, on a alors $u'(t) = 2t + 20$.
On pose aussi $v(t) = e^{-t-1}$ et ainsi $v'(t) = -e^{-t-1}$.
On dérive la fonction p sans oublier de tout multiplier par 100 :
$p'(t) = 100\big((2t + 20)e^{-t-1} + (t^2 + 20t) \times (-e^{-t-1})\big)$
Ensuite, on factorise par l'exponentielle, en faisant attention au – dans le deuxième produit.
$p'(t) = 100\big(e^{-t-1}(2t + 20 - t^2 - 20t)\big)$
$\boldsymbol{p'(t) = 100e^{-t-1}(-t^2 - 18t + 20)}$
2. Le signe de cette dérivée ne dépend que du polynôme, on calcule son discriminant et on trouve ses racines, qui sont environ $-19{,}05$ (qui est hors de l'intervalle) et $1{,}05$.
Ainsi, on trouve que $p'(t)$ est positif sur $[0; 1{,}05]$ puis négatif sur $[1{,}05; +\infty[$ et p est croissante sur $[0; 1{,}05]$ puis décroissante sur $[1{,}05; +\infty[$.
Le nombre maximal de malades est donc atteint **au bout d'environ $\boldsymbol{1{,}05}$ semaines**.
Il est égal à environ $f(1{,}05) \approx \boldsymbol{285}$.

Exercice 3

f est de la forme u^6. Sa dérivée est de la forme $6u'u^5$.

On pose $u(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 10$, on a alors $u'(x) = 2x + \frac{3}{2}$. Ainsi, $f'(x) = \mathbf{6\left(2x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)^5}$

Il faut donc étudier le signe des deux facteurs. Le facteur $\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)^5$ étant une puissance impaire, il a le même signe que $\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)$ tout seul.

Pour $2x + \frac{3}{2}$, on résout l'équation $2x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}75$

Pour $\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)$, on calcule le discriminant et on trouve les racines -4 et 2,5.

On peut donc établir le tableau de signes de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-4		$-0,75$		$2,5$		$+\infty$
$2x + \frac{3}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 + \frac{3}{2} - 10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ainsi, la tangente à la courbe de f est **horizontale aux points d'abscisses $\mathbf{-4}$; $\mathbf{-0,75}$ et $\mathbf{-2,5}$**.

Exercice 4

1. Le côté BC ne peut mesurer que moins de 5 cm, car sinon il serait impossible de tracer un triangle dont la somme des côtés mesure 10 cm, d'après l'inégalité triangulaire ($BC < AB + AC$). D'où $\mathbf{0 < x < 5}$.

2. Le côté AB mesure $\frac{10-x}{2}$ cm. Le triangle ABH étant rectangle en H, d'après Pythagore, on a :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{(10-x)^2 - x^2}{4} = \frac{100 - 20x + x^2 - x^2}{4} = 25 - 5x$$

Donc $AH = \mathbf{\sqrt{25 - 5x}}$.

3. D'après la formule, l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la hauteur AH et de la base relative à cette hauteur BC. D'où $\mathcal{A}(x) = \frac{\sqrt{25-5x} \times x}{2} = \mathbf{\frac{x}{2}\sqrt{25 - 5x}}$

4. Il s'agit d'un produit, avec une composée. On pose $u(x) = \frac{x}{2}$ d'où $u'(x) = \frac{1}{2}$.

$v(x) = \sqrt{25 - 5x}$ est une composée et $v'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{25-5x}}$. Ainsi :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{25 - 5x} + \frac{x}{2} \times \frac{-5}{2\sqrt{25 - 5x}}$$

$$= \frac{\sqrt{25 - 5x}}{2} - \frac{5x}{4\sqrt{25 - 5x}}$$

$$= \frac{\sqrt{25 - 5x} \times 2\sqrt{25 - 5x}}{4\sqrt{25 - 5x}} - \frac{5x}{4\sqrt{25 - 5x}}$$

$$= \frac{2(25 - 5x) - 5x}{4\sqrt{25 - 5x}}$$

$$= \frac{50 - 15x}{4\sqrt{25 - 5x}}$$

Le signe de la dérivée ne dépend que de la fonction affine $50 - 15x$, qui s'annule pour $x = \frac{10}{3}$.

On trouve donc que l'aire est maximale pour $BC = \frac{10}{3}$, ce qui correspond au cas d'un triangle équilatéral.

Tout ça pour ça. On aurait pu le deviner.

charly-piva.fr