Correction du devoir surveillé *sur le chapitre 2*

Exercice 1 (3 pts) **a.** *(1 pt)* On lit $f(1) = -1$, et le coefficient directeur de la tangente donne $f'(1) = 2$
b. *(1 pt)* Le point A semble être un point d'inflexion, car la courbe traverse sa tangente en ce point.
c. *(1 pt)* f semble convexe sur $]-\infty; -0{,}8]$ puis concave sur $[-0{,}8; 0{,}5]$ et enfin convexe sur $[0{,}5; +\infty[$.
(D'autres valeurs sont acceptées, comme par exemple $-0{,}9$ et $0{,}4$)

Exercice 2 (4,5 pts) **1. a.** *(1 pt)* On ne peut calculer la racine que d'un nombre positif.
f est donc définie pour tout x tel que $x^3 - 8 \geq 0$, soit $x^3 \geq 8$, soit $x \geq 2$. Donc f est définie sur $[2; +\infty[$.
b. *(1 pt)* C'est une fonction de la forme $\sqrt{u}$, ainsi :

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}}$$

(1 pt) Cette dérivée, quotient d'un carré (positif) par une racine (positive), est positive pour tout $x \in]2; +\infty[$, donc f est croissante sur $]2; +\infty[$.
2. C'est une fonction de la forme u^5, mais la fonction u est elle-même un quotient.
(0,5 pt) On dérive u : pour tout x différent de -1,

$$u'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

(1 pt) Ainsi, on applique la formule $5u'u^4$ pour trouver :

$$g'(x) = 5 \times \frac{4}{(x+1)^2} \times \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^4 = \frac{20(3x-1)^4}{(x+1)^6}$$

(la dernière étape du calcul n'est pas exigée)

Exercice 3 (5,5 pts) **a.** *(1 pt)* C'est une fonction de la forme e^u. Sa dérivée est $f'(x) = (2x-6)e^{x^2-6x}$
(1 pt) On étudie le signe de la dérivée, qui est celui de $(2x - 6)$: négatif sur $]-\infty\,; 3]$ puis positif sur $[3\,; +\infty[$.
(0,5 pt) Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty\,; 3]$ puis croissante sur $[3\,; +\infty[$.
b. *(1,5 pt)* f' se dérive maintenant comme un produit. Ainsi,
$f''(x) = 2e^{x^2-6x} + (2x-6)(2x-6)e^{x^2-6x} = (2 + 4x^2 - 24x + 36)e^{x^2-6x} = (4x^2 - 24x + 38)e^{x^2-6x}$
$= 2(2x^2 - 12x + 19)e^{x^2-6x}$
c. *(1 pt)* On étudie le signe de la dérivée seconde, qui est celui de $(2x^2 - 12x + 19)$. On calcule son discriminant, qui est négatif, donc la dérivée seconde est positive pour tout x.
(0,5 pt) Ainsi, la fonction f est convexe sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (7 pts) **1.** *(1,5 pts)* On dérive f comme un produit :
$f'(x) = 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5} \times 70e^{-\frac{x}{5}} + \frac{1}{5} \times (-14x - 42)e^{-\frac{x}{5}}$
$= \frac{1}{5}(70 - 14x - 42)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}$
2. *(0,5 pt)* On étudie le signe de f' qui est celui de $(-14x + 28)$: positif sur $[0\,; 2]$ puis négatif sur $[2\,; 60]$.
(0,5 pt) Ainsi, f est croissante sur $[0\,; 2]$ puis décroissante sur $[2\,; 60]$.
(0,5 pt) On calcule pour le tableau de variations : $f(0) \approx 112$, $f(2) \approx 117$ et $f(60) \approx 70$. *(On ne demandait pas d'arrondi particulier, donc l'arrondi à l'entier convient)*
3a. *(1 pt)* $f''(7) = 0$, donc le point A est un point d'inflexion de (C).
3b. *(1 pt)* $f''(x)$ est du signe de $(x - 7)$: négatif sur $[0\,; 7]$ puis positif sur $[7\,; 60]$.
Ainsi, f est concave sur $[0\,; 7]$ puis convexe sur $[7\,; 60]$.
3c. *(1 pt)* f est concave sur $[0\,; 7]$, donc (T) est au-dessus de (C) sur cet intervalle.
Ensuite, f est convexe, donc sur $[7\,; 60]$, (C) est au-dessus de (T).
4. *(1 pt)* La calculatrice fournit $16{,}54 \leq \alpha \leq 16{,}55$.