

Chapitre 10 - Dénombrement

1. Ensembles et opérations

1a. Définitions

Définition : Un ensemble est une collection d'éléments distincts.

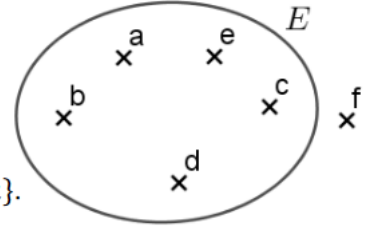
Exemple L'ensemble E ci-contre se note $E = \{a; b; c; d; e\}$.

On peut noter $a \in E$ et $f \notin E$.

Dans un ensemble, qui se note entre **accolades**,

l'ordre des éléments n'a pas d'importance : $E = \{b, d, a, c, e\}$

Il n'y a **pas de doublons** dans un ensemble, chaque élément est unique : $\{a; a\} = \{a\}$.



L'ensemble vide, qui ne contient aucun élément, est noté $\emptyset$.

Il existe des ensembles **finis** (comme E) et **infinis** (comme les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, ou les **intervalles**)

Les ensembles interviennent partout en mathématiques :

- la **solution d'une équation**, par exemple l'ensemble solution de l'équation $x^2 - 49 = 0$ est
- idem pour les **inéquations**, l'ensemble solution de l'inéquation $-2x + 7 \geq 0$ est
- l'**ensemble de définition d'une fonction**, par exemple pour $f: x \mapsto \sqrt{3x - 12}$ définie sur
- le **plan** ou l'**espace** sont des ensembles, notés $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (nous verrons pourquoi)
- les **cercles dans le plan** sont des ensembles de points (x, y) vérifiant une équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r$
- les **plans dans l'espace** sont des ensembles de points (x, y, z) vérifiant une équation $ax + by + cz + d = 0$
- on peut créer des **ensembles d'ensembles**, par exemple $E = \{\{a\}, \{b, c\}\}$
- on peut créer des ensembles avec **différentes catégories d'objets mathématiques** : l'ensemble des fonctions dérivables, des polynômes du second degré, des suites convergentes, des variables aléatoires...

Malgré son rôle central en mathématiques, la théorie des ensembles est assez récente, principalement développée par Georg Cantor à la fin du XIX^e siècle.

- On note $a \in E$ et $f \notin E$.
- L'ensemble vide est noté $\emptyset$.
- L'ensemble solution de l'équation $x^2 - 49 = 0$ est $\{-7; 7\}$.

L'ensemble solution de l'inéquation $-2x + 7 \geq 0$ est $] -\infty; 3,5]$

L'ensemble de définition de $f: x \mapsto \sqrt{3x - 12}$ est $[4; +\infty[$

1b. Parties et opérations

Définition : Soient E et F deux ensembles.

Si chaque élément d'un ensemble F appartient à E , on dit que F est inclus dans E , ou que F est une partie/un sous-ensemble de E .

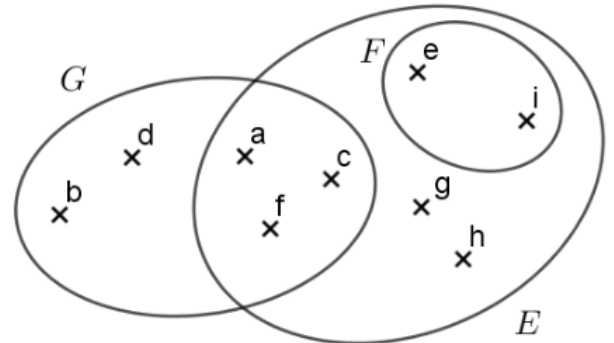
On note $F \subset E$.

Ci-contre, on a :

$$E = \{a, c, e, f, g, h, i\}$$
$$F = \{e, i\}$$
$$G = \{a, b, c, d, f\}$$

On a alors $F \subset E$.

Attention : on n'écrit pas $F \in E$: l'ensemble F n'est pas un élément de E .



L'**union** de deux ensembles est l'ensemble formé des éléments de ces deux ensembles, par exemple $E \cup G = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$. Notez que comme $F \subset E$, on a $E \cup F = E$.

L'**intersection** de deux ensembles est l'ensemble formé des éléments qui sont dans les deux ensembles en même temps, par exemple $E \cap G = \{a, c, f\}$. Notez que comme $F \subset E$, on a $E \cap F = F$.

De plus, $F \cap G = \emptyset$: F et G sont des ensembles **disjoints**.

L'union représente un «ou» logique : $x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F)$. L'intersection représente un «et» logique.

On peut aussi créer des **complémentaires** d'ensembles, par exemple $E \setminus G = \{e, g, h, i\}$.

Dans les réels, on note par exemple $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ pour représenter $] - \infty; 4[\cup] 4; +\infty[$

En probabilités, si Ω représente l'univers et A un événement, $\bar{A}$ est une abréviation du complémentaire $\Omega \setminus A$.

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$, les **parties de E** , est l'ensemble des sous-ensembles de E .

Par exemple, $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset; \{e\}; \{i\}; \{e, i\}\}$

On montrera plus tard que par exemple, $\mathcal{P}(E)$ contient 128 éléments (il inclut notamment F).

$$\mathcal{P}(F) = \{\emptyset; \{e\}; \{i\}; \{e, i\}\}$$

1c. Cardinal

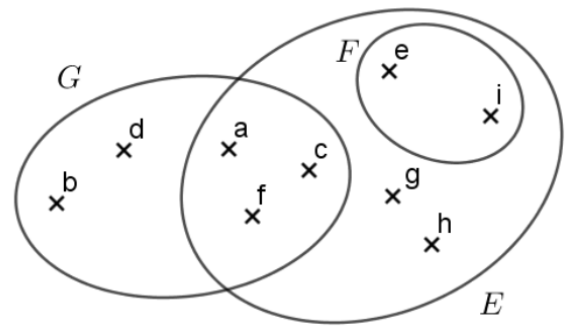
Définition : Le cardinal est le nombre d'éléments d'un ensemble E .
On le note parfois $\text{card}(E)$ ou $\#E$.

Propriété : Pour deux ensembles E et F :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

Remarque : Cela rappelle la formule de probabilités $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple : utiliser cette formule pour calculer $\text{card}(E \cup G)$
et $\text{card}(G \cup F)$.



$$\text{card}(E \cup G) = 7 + 5 - 3 = 9 \text{ et } \text{card}(G \cup F) = 5 + 2 - 0 = 7.$$

2. Couples et p-uplets

Remarque : dans toute la suite du chapitre, E est un ensemble à n éléments, et p est un entier naturel non nul.

2a. Définition

Définition : Un **p -uplet** de E est une collection **ordonnée** de p éléments (avec éventuellement des **répétitions**).

Exemple : • un **couple** d'éléments de $\mathbb{R}$ se note $(x; y)$ et représente **2 éléments** de $\mathbb{R}$.

Les couples d'éléments de $\mathbb{R}$ servent à représenter les coordonnées des points du plan, ou les solutions des systèmes d'équations à deux inconnues.

• un **triplet** d'éléments de $\mathbb{R}$ se note $(x; y; z)$ et représente **3 éléments** de $\mathbb{R}$.

En généralisant cette définition, on peut définir les **p -uplets** : pour $p = 3$, ce sont les triplets, pour $p = 4$, ce sont les quadruplets, etc.

Ils diffèrent des ensembles de trois façons :

- les p -uplets se notent avec des **parenthèses** plutôt qu'avec des accolades,
- **l'ordre est important** : $(a; b)$ n'est pas égal à $(b; a)$.

Par exemple dans le plan, les points $(2; -5)$ et $(-5; 2)$ sont différents.

- **les doublons sont possibles** : le triplet $(a; a; b)$ n'est pas égal au couple $(a; b)$.

Par exemple, l'un peut représenter le point $(1; 1; 3)$ de l'espace, l'autre représente le point $(1; 3)$ du plan.

Généralement, dans un raisonnement mathématique, on ne mélange pas les p -uplets de taille différente. Par exemple, dans l'espace, on ne travaille qu'avec des triplets (coordonnées de points et de vecteurs).

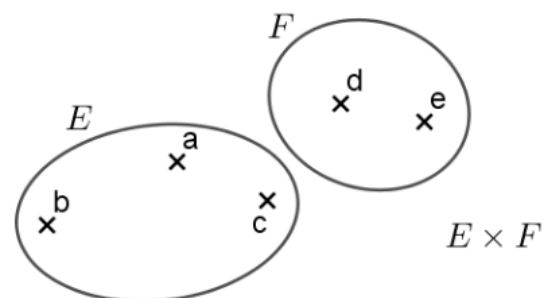
Définition : Soient E et F deux ensembles.

L'ensemble noté $E \times F$ est l'ensemble des **couples** $(x; y)$, avec $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{d; e\}$,

alors $E \times F = \dots\dots\dots$

Notez que $E \times F$ est un nouvel ensemble, ce n'est pas une partie de E ou de F (il contient des couples).



Dans le plan, les points $(x; y)$ sont des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, qu'on note plus rapidement $\mathbb{R}^2$: l'ensemble des couples de réels.

De même, l'espace est formé de points $(x; y; z)$ et on le note $\mathbb{R}^3$.

$$E \times F = \{(a; d); (a; e); (b; d); (b; e); (c; d); (c; e)\}$$

2b. Dénombrement des p -uplets

Propriété : Le nombre de p -uplets (collections ordonnées avec répétitions) de E est n^p .

Démonstration : pour créer un p -uplet, on a :

- n choix pour le 1^{er} élément
- n choix pour le 2^{ème} élément
- ... et ainsi de suite, p fois.

On peut donc en créer $n \times n \times \dots \times n = n^p$ différents.

Exemple 1

On lance 7 fois une pièce de 1 euro pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles.

Exemple 2

À l'aide des lettres du mot LIVRE, on souhaite écrire des mots de quatre lettres, ayant un sens ou non.

- Donner quelques exemples de ces mots.
- Combien de mots peut-on composer ?

Exemple 3 Une cantine scolaire propose à ses élèves un menu à composer au choix. Ils peuvent choisir entre 4 entrées, 3 plats chauds, puis du fromage ou un yaourt et enfin un dessert ou un fruit. Combien de menus peuvent-ils composer à la cantine ?

Exemple 1

Pour chacun des 7 lancers, on a deux résultats possibles. Le nombre de résultats possibles est donc $2^7 = 128$.

Un résultat possible serait par exemple « pile, face, face, pile, face, face, face ». C'est un 7-uplet.

Exemple 2

a. On a par exemple LRIE ou bien VRIL ou même LLVR. *Ces mots sont des 4-uplets de lettres.*

b. Pour chacune des 4 lettres, on a 5 choix possibles.

On peut composer $5^4 = 625$ mots.

Exemple 3

On peut composer $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ menus. *Encore davantage si on peut choisir de ne pas prendre de fromage/yaourt, par exemple.*

2c. Permutations

Définition : Une **permutation** de E est un **n -uplet** d'éléments **distincts** de E .

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$, les permutations de E sont :

$$\{(a; b; c); (a; c; b); (b; a; c); (b; c; a); (c; a; b); (c; b; a)\}$$

Propriété : Le **nombre de permutations** de E est **$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$** .
C'est le nombre de manières dont on peut « mélanger » les éléments de E .

Remarque : on pose $0! = 1$.

Démonstration : pour créer une permutation d'un ensemble à n éléments, on a :

- n choix pour le 1^{er} élément
- $(n - 1)$ choix pour le 2^{ème} élément (car on ne peut plus prendre le 1^{er} élément)
- $(n - 2)$ choix pour le 3^{ème} élément
- ... et ainsi de suite, n fois.

On peut donc en créer $1 \times 2 \times \dots \times (n - 1) \times n = n!$ différentes.

Exemple 1 On dispose de quatre gâteaux. Chacun des 4 invités en choisit un pour le manger.
Combien de choix possibles y a-t-il ?

Exemple 2 Huit coureurs sont au départ de la finale d'une course de 100 mètres.

- Combien de classements différents peut-on construire ?
- Combien de podiums différents existe-t-il ?

Exemple 3 Marion a révélé que son mot de passe est composé de toutes les lettres de son prénom, placées dans un ordre différent. Elle craint que quelqu'un tente de le deviner.

- Combien cela donne-t-il de possibilités ?
- Combien y en a-t-il si le mot de passe n'est en fait constitué que de 4 lettres distinctes de son prénom ?
- Combien y en a-t-il si le mot de passe n'est constitué que de 4 lettres, pas nécessairement distinctes ?

Exemple 1 Le 1^{er} invité a 4 choix, puis le 2^{ème} a 3 choix, etc.
Le nombre de choix possibles est donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$.

Exemple 2

- Le nombre de classements possibles est $8! = 40\,320$.
- Le 1^{er} doit être choisi par les 8 coureurs, puis le 2^{ème} parmi les 7 restants et le 3^{ème} parmi les 6 restants. Il existe $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums.

Exemple 3

- Le nombre de possibilités est $7! = 5\,040$.
- Si on ne prend que 4 lettres distinctes : $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.
- Si on ne prend que 4 lettres éventuellement identiques : $7^4 = 2\,401$.

3. Arrangements et combinaisons

3a. Arrangements

Définition : Un **arrangement** de E est une collection **ordonnée sans répétitions** de p éléments. C'est un p -uplet dont tous les éléments sont distincts.

Propriété : Le nombre d'arrangements à p éléments est : $\frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration : Pour créer un arrangement à p éléments, on a :

- n choix pour le 1^{er} élément,
- $(n - 1)$ choix pour le 2^{ème} élément
- $(n - 2)$ choix pour le 3^{ème} élément
- ... jusqu'à arriver à $(n - p + 1)$ choix pour le p -ième élément.

On a donc $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1)$ choix, ce qui s'écrit plus simplement $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 1 Pour créer le logo d'un club de mathématiques, on propose d'écrire le mot MATHS et d'en colorer les lettres. On dispose de huit couleurs différentes. Combien de coloriages peut-on réaliser...

1. ...si on ne souhaite utiliser chaque couleur qu'une seule fois ?
2. ...s'il est possible d'utiliser une même couleur plusieurs fois ?
3. ...s'il est possible d'utiliser une même couleur plusieurs fois, mais qu'on souhaite que deux lettres adjacentes ne soient pas de la même couleur ?

Exemple 2 Un sac opaque contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
3. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

Exemple 3 On souhaite choisir un code pour un immeuble. L'interphone dispose de 10 touches portant les chiffres de 0 à 9, ainsi que de trois touches portant une lettre A, B ou C. Il est possible d'utiliser la même touche plusieurs fois. Le code doit contenir 6 caractères, par exemple « 5AC380 » ou « 272B19 ».

1. Déterminer le nombre de codes possibles.
2. Déterminer le nombre de codes possibles, si l'on souhaite que tous les caractères soient différents.
3. Déterminer le nombre de codes ne comportant pas la lettre A.
4. En déduire le nombre de codes comportant au moins une fois la lettre A.
5. Déterminer le nombre de codes comportant exactement une fois la lettre A.

Exemple 1

1. Cela correspond à un arrangement : l'ordre des couleurs choisies est important (choisir rouge pour le M puis vert pour le A, est différent de choisir vert pour le M puis rouge pour le A) et on ne veut pas que les couleurs se répètent.

Le nombre de coloriages sans répétitions est $\frac{8!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$

2. Ici, c'est un 5-uplet : l'ordre des 5 couleurs choisies est toujours important, mais on peut avoir des répétitions.

Le nombre de coloriages avec répétition éventuelles est $8^5 = 32\,768$.

3. Dans cette dernière question, il faut raisonner pas à pas.

- on a 8 choix pour la 1ère couleur,

- puis 7 choix pour la 2ème (il ne faut pas prendre une couleur identique à la 1ère),

- puis 7 choix pour la 3ème (il faut une couleur différente de la 2ème, mais elle peut être identique à la 1ère)

- et ainsi de suite.

Le nombre de coloriages dans ce dernier cas est $8 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 19\,208$.

Exemple 2

1. Ordre important et répétitions autorisées, c'est un 3-uplet ! Un triplet, quoi.

Le nombre de tirages est $9^3 = 729$.

2. Ordre important mais pas de répétitions, c'est un arrangement.

Le nombre de tirages sans répétition est $\frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 7 \times 8 = 504$.

3. On connaît le nombre de tirages en général, et le nombre de tirages sans répétition. Avec une soustraction, on obtiendra le nombre de tirages contenant au moins une répétition.

Le nombre de tirages contenant au moins une répétition est $729 - 504 = 225$.

Exemple 3

1. Ordre important et répétitions autorisées, c'est un 6-uplet (un sextuplet) de 13 caractères possibles.

Le nombre de codes est $13^6 = 4\,826\,809$.

2. Le nombre de codes sans répétition est :

$$\frac{13!}{(13-6)!} = \frac{13!}{7!} = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 1\,235\,520.$$

3. C'est comme la question 1, mais on ne dispose plus que de 12 caractères.

Le nombre de codes ne contenant pas de A est $12^6 = 2\,985\,984$.

4. On connaît le nombre de codes, et le nombre de codes qui ne contiennent pas de A. Par soustraction, on trouve le nombre de codes contenant au moins un A.

Le nombre de codes contenant au moins un A est $13^6 - 12^6 = 1\,804\,825$.

5. Plus difficile. Pour créer un code contenant exactement un A, on peut :

- choisir l'emplacement du A dans le code (on peut le placer à 6 endroits différents)

- choisir les 5 autres lettres, sachant qu'on peut tout mettre, avec des répétitions éventuelles, sauf des A. On a donc droit aux 12 autres caractères.

Le nombre de codes contenant exactement un A est $6 \times 12^5 = 1\,244\,160$.

3b. Combinaisons

Définition : Une **partie** de E est une collection **non ordonnée**, **sans répétitions** de p éléments.

Propriété : Le nombre de parties à p éléments, aussi appelé **combinaisons**, est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

On lit ce nombre « p parmi n ».

Démonstration : Pour créer une combinaison, on peut s'intéresser au nombre d'arrangements à p éléments, qui est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Or les combinaisons ne sont pas ordonnées, et il existe $p!$ façons de réordonner les arrangements à p éléments.

On divise donc le nombre d'arrangements par $p!$, ce qui donne bien $\frac{n!}{(n-p)! \times p!}$.

Exemple 1 À l'entrée en première générale, les élèves du lycée Colbert doivent choisir trois spécialités parmi les 7 proposées. Si on ne donne aucune restriction, combien de combinaisons différentes peut-on choisir ?

Exemple 2 Sur une grille de loto, un joueur choisit cinq nombres entre 1 et 49 inclus puis un nombre « Chance » entre 1 et 10 inclus. Combien existe-t-il de grilles de loto possibles ?

Exemple 3 Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débiteront un match. Il a 23 joueurs à sa disposition.

a. Sans prendre en compte le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-on former ?

b. Parmi les 23 joueurs, on trouve trois gardiens, huit défenseurs, cinq milieux de terrain et sept attaquants. Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrain et de trois attaquants, combien d'équipes le sélectionneur peut-il former avec ces nouvelles contraintes ?

Exemple 1 *Cela correspond à une combinaison : sans répétition, et non ordonnée (le choix Maths-SES-HGGSP est identique au choix HGGSP-Maths-SES).*

Le nombre de combinaisons possibles est

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

Exemple 2 *Le choix des 5 nombres parmi 49 est sans répétition et non ordonné.*

Le nombre de grilles est :

$$\binom{49}{5} \times 10 = \frac{49!}{44! \times 5!} \times 10 = 19\,068\,840$$

Exemple 3 a. Le nombre d'équipes est alors $\binom{23}{11} = \frac{23!}{11! \times 12!} = 1\,352\,078$.

b. *On choisit 1 gardien parmi 3, puis 4 défenseurs parmi 8, etc.*

Le nombre d'équipes est : $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{7}{3} = 3 \times 70 \times 10 \times 35 = 73\,500$

4. Coefficients binomiaux

4a. Propriétés

Définitions : Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés les coefficients binomiaux.

Propriétés : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, et $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

4b. Relation et triangle de Pascal

Propriété :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration : Soit x un élément de E .

Comptons les parties de E à p éléments, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$.

- les parties qui contiennent x contiennent alors $(p-1)$ autres éléments parmi les $(n-1)$ éléments restants. Il y en a $\binom{n-1}{p-1}$.
- les parties qui ne contiennent pas x contiennent alors (p) autres éléments parmi les n éléments restants. Il y en a $\binom{n-1}{p}$.

Ainsi, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

De cette formule, on déduit le **triangle de Pascal**, qui permet de déterminer tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$, où chaque case est la somme de la case du dessus et de sa case à gauche.

$n \quad p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

On ne peut compléter que la partie inférieure du tableau : dans $\binom{n}{p}$, p doit être inférieur ou égal à n .

$n \quad p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

4c. Binôme de Newton

L'intégralité de cette partie n'est pas au programme du Bac.

Propriété : Les coefficients binomiaux permettent de créer des identités remarquables : pour tous a et b réels et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Par exemple, $(a + b)^3 =$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Démonstration : Soient a et b réels. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $(a + b)^0 = 1$

et $\sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} a^p b^{0-p}$ est une somme à un terme, valant $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$. Calculons :

$$\begin{aligned} & (a + b)^{n+1} \\ &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \right) \end{aligned}$$

On développe le $(a + b)$ dans la grosse somme.

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \times a + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \times b \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p} + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-(p-1)} \end{aligned}$$

Dans la somme de gauche, on peut faire un changement d'indice : au lieu de considérer que c'est une somme pour p allant de 0 à n , on peut considérer que c'est une somme pour $p - 1$ allant de 0 à n , c'est-à-dire pour p allant de 1 à $(n + 1)$. On remplace alors tous les p par des $(p - 1)$.

$$= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{n-(p-1)} + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-(p-1)}$$

On sort le terme d'indice $p = n + 1$ de la somme de gauche, qui est égal à a^{n+1} et le terme d'indice $p = 0$ de la somme de droite, qui est égal à b^{n+1} .

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p-1} a^p b^{n-(p-1)} + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-(p-1)} + b^{n+1}$$

On peut alors regrouper nos deux sommes, qui ont le même nombre de termes, et factoriser par $a^p b^{n-(p-1)}$.

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^n \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \right) a^p b^{n-(p-1)} + b^{n+1}$$

On applique la relation de Pascal !

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^n \binom{n+1}{p} a^p b^{n-(p-1)} + b^{n+1}$$

Les coefficients binomiaux $\binom{n+1}{0}$ et $\binom{n+1}{n+1}$ étant égaux à 1 de toute façon, on peut réintégrer les termes a^{n+1} et b^{n+1} .

$$= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p b^{n+1-p}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Propriété :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E contient 2^n éléments.

Démonstration : Tout d'abord, $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$.

Ensuite, une partie de E peut être une partie :

- composée de 0 éléments : l'ensemble vide
- composée de 1 élément : il y en a $\binom{n}{1}$, soit n
- composée de 2 éléments : il y en a $\binom{n}{2}$
- et ainsi de suite jusqu'à n .

Ainsi, le nombre $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$, c'est-à-dire 2^n .

5. Synthèse

Résumé : si E est un ensemble à n éléments :

- le nombre de **p – uplets**, collection ordonnée avec répétitions de p éléments de E , est :
- le nombre de **permutations** des n éléments de E , est :
- le nombre d'**arrangements à p éléments**, collection ordonnée sans répétitions de p éléments de E , est :
- le nombre de **parties à p éléments**, collection non-ordonnée sans répétitions de p éléments de E , est :
(auss appelé combinaison)

Exemple 1 Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, sans remise. On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées. Quel est le nombre de tirages possibles, sans tenir compte de l'ordre des numéros ?

Exemple 2 On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats. Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

Exemple 3 On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. On considère la liste ordonnée des n résultats. Quel est le nombre de listes ordonnées comportant au plus deux fois « pile » ?

- le nombre de p – uplets est n^p
- le nombre de permutations des n éléments de E est $n!$
- le nombre d'arrangements à p éléments est $\frac{n!}{(n-p)!}$
- le nombre de parties à p éléments est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$

Exemple 1 *Un tirage est, d'après l'énoncé, non-ordonné et sans répétition. C'est une partie à 3 éléments.*

Le nombre de tirages est $\binom{50}{3} = \frac{50!}{47! \times 3!} = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2 \times 1} = 19\,600$.

Exemple 2 *La liste est ordonnée et on peut bien évidemment obtenir plusieurs fois le même résultat. C'est un 10-uplet. Un décuplet de piles ou faces.*

Le nombre de listes ordonnées est $2^{10} = 1\,024$.

Exemple 3 *Bien plus difficile. Au plus deux fois « pile », ça veut dire :*

- aucun pile, ce qui correspond à une seule liste
- une seule fois pile, c'est-à-dire qu'il faut, dans la liste, choisir lequel des n lancers sera un pile. On a donc n choix.
- deux fois pile : il faut, toujours dans la liste, choisir 2 lancers parmi les n qui seront des piles. Ce choix est non ordonné (choisir le 5^{ème} et le 7^{ème} lancer est pareil que choisir le 7^{ème} et le 5^{ème}) : on a $\binom{n}{2}$ possibilités.

Le nombre de listes comportant au plus 2 piles est :

$$1 + n + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$