

Correction des exercices de synthèse sur le dénombrement

Exercice 1 a. Il s'agit d'un arrangement : $10 \times 9 \times 8 = 720$. b. Il s'agit d'une combinaison : $\binom{10}{3} = 120$.

Exercice 2 Si on différencie toutes les billes, on compte 10 billes dans la première urne et 10 billes dans la suivante, ce qui fait 100 tirages possibles.

a. On a 8 chances sur 10 dans l'urne U_1 , puis 7 chances sur 10 dans l'urne U_2 : $\frac{8}{10} \times \frac{7}{10} = 0,56$

b. Il faut ajouter à la probabilité précédente, celle de tirer deux boules vertes : $0,56 + \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = 0,62$

c. $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = 0,06$

d. On connaît la probabilité de ne tirer aucune boule verte (question a) et celle de tirer deux boules vertes (question c). Par soustraction : $1 - 0,56 - 0,06 = 0,38$.

Exercice 3 a. Un mot est un 5-uplet de lettres A, B ou C, il en existe $3^5 = 243$.

b. Si on veut créer un mot où aucune réponse n'est exacte, on n'a plus que 2 choix pour chacune des 5 questions. Le nombre de mots où le candidat n'a aucune réponse exacte est $2^5 = 16$.

c. « Exactement une réponse exacte », cela peut donc tomber sur une et une seule des 5 questions. On a donc 5 choix pour la question à réussir.

Pour les quatre autres, il faut donc donner une mauvaise réponse : on a donc 2 choix de mauvaises réponses pour chacune des 4 autres questions. La réponse est donc $5 \times 2^4 = 80$.

d. On peut créer un palindrome de la manière suivante : on choisit la lettre de notre choix pour la première lettre (3 choix, donc), idem pour la deuxième et la troisième. Par contre, une fois ces lettres choisies, la quatrième et la cinquième sont fixées : elles doivent être identiques à la deuxième et la première respectivement. On peut donc créer $3 \times 3 \times 3 = 27$ palindromes.

Exercice 4 1. Un code est un 4-uplet de chiffres, il en existe $10^4 = 10\,000$.

2. Dans ce cas, c'est un arrangement : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

3a. On pourrait naïvement penser qu'on a 4 choix pour le 1^{er} chiffre, puis 3 choix pour le 2^{ème}, etc. et donc, cela nous donnerait le nombre de permutations de 4 éléments : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

MAIS deux de ces chiffres (les deux 9) sont identiques : si on change leur ordre, cela ne change pas le code saisi : « 1995 est identique à 1995 ». On peut faire cela pour chacune des 24 permutations trouvées.

Donc avec les chiffres donnés, on peut saisir $\frac{24}{2} = 12$ codes différents.

3b. 24 heures, c'est 1 440 minutes. On peut, en tâtonnant, calculer qu'on attend au total :

- 0 minute pour saisir le 1^{er} code,

- 2 minutes pour saisir le 1^{er}, puis le 2^{ème} code,

- 6 minutes pour saisir le 1^{er}, puis le 2^{ème}, puis le 3^{ème},

... et continuer ainsi jusqu'à atteindre 1 440. Ce n'est pas si long, promis.

On peut aussi considérer la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 2$, u_n correspondant au temps d'attente pour saisir le code d'indice $(n + 2)$. La somme de ses termes de u_0 à u_n , comme vous vous en rappelez probablement depuis le chapitre sur les suites, est :

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = -2(1 - 2^{n+1}) = -2 + 2^{n+2}$$

On s'empresse donc de résoudre l'inéquation :

$$-2 + 2^{n+2} \leq 1\,440 \Leftrightarrow 2^{n+2} \leq 1\,438 \Leftrightarrow (n + 2) \ln(2) \leq \ln(1\,438) \Leftrightarrow n + 2 \leq \frac{\ln(1\,438)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(1\,438)}{\ln(2)} - 2$$

et une valeur approchée à l'entier inférieur de $\frac{\ln(1\,438)}{\ln(2)} - 2$ est 8. Ainsi, l'indice n correspondant au temps d'attente pour le code

d'indice $(n + 2)$, on trouve que le propriétaire ne pourra saisir que 10 codes en 24 heures. On aurait mieux fait de tâtonner plutôt que de faire le malin avec les suites géométriques. Imaginez si le bon code est le 11^{ème} ou le 12^{ème}.

Exercice 5

Ici, un tirage, c'est la donnée d'une première boule (il y en a 40 possibles), ainsi que d'une deuxième boule (il y en a $40 + n$ possibles).

Pour créer un tirage avec deux boules de même couleur :

- il faut tirer une des 30 boules blanches, puis tirer une des $(30 + n)$ boules blanches.
- ou bien, il faut tirer une des 10 boules noires, puis tirer une des $(10 + n)$ boules noires.

Ainsi, on a $30(30 + n) + 10(10 + n) = 900 + 30n + 100 + 10n = 1\,000 + 40n$ tirages avec des boules de même couleur.

On résout donc l'équation $1\,000 + 40n = 2\,000 \Leftrightarrow 40n = 1\,000 \Leftrightarrow n = 25$.