Chapitre 9 – Calcul intégral

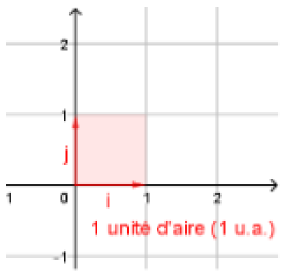
1. Intégrale d'une fonction positive

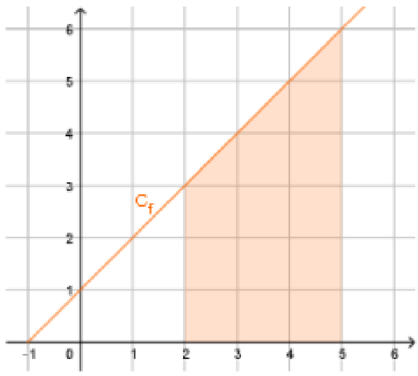
1a. Calculs d'aire

Dans cette partie, f est une fonction continue sur un segment $[a;b]$, à valeurs toujours positives.

Définition : L'intégrale de f de a à b, notée $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou encore $\int_a^b f$; représente l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

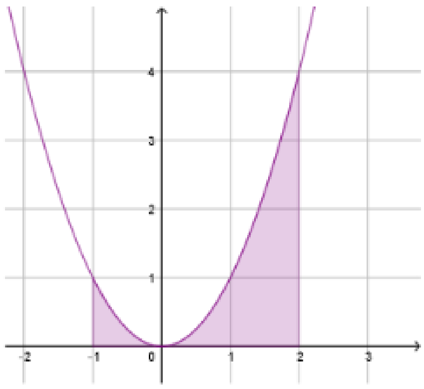
Remarque : les intégrales se comptent en **unités d'aire.**
Dans un repère$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, c'est l'aire du quadrilatère délimité par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.





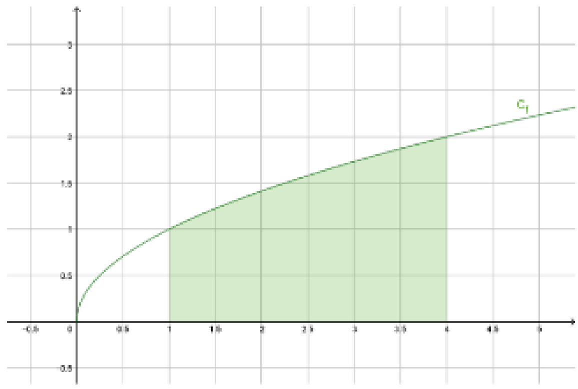
On a représenté $f : x \longmapsto x+1$.
Donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_2^5 f(t)dt =$$



On a représenté la fonction carrée. Exprimer l'aire colorée avec le symbole $\int$.

$$A =$$



On a représenté $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.
Donner une valeur approchée de l'intégrale suivante.

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \approx$$

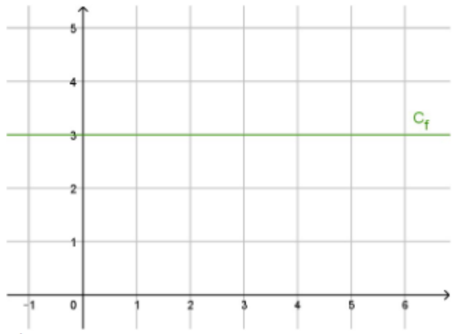
• $\int_2^5 f(t)\,dt = 9 + 4{,}5 = 13{,}5$. *Il s'agit de compter les carreaux.*

• $A = \int_{-1}^2 x^2 dx$. *C'est l'intégrale de la fonction carré, de −1 à 2.*

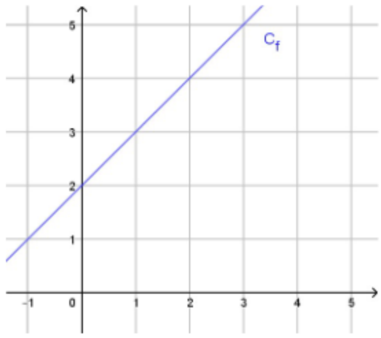
• *Ici, la graduation étant de 0,5, l'unité d'aire (u.a.) correspond à 4 carreaux. On compte approximativement 18 carreaux, et on divise par 4.*

$\int_1^4 \sqrt{x} \approx \frac{18}{4} \approx 4{,}5$

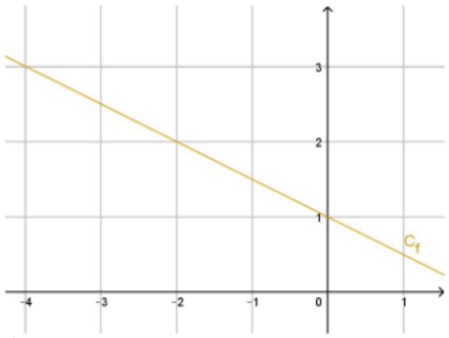
Dans chaque cas, délimiter le domaine de l'intégrale, puis donner sa valeur.



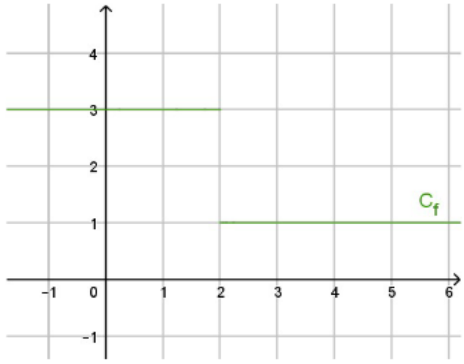
$\int_1^5 f(t)\, dt =$



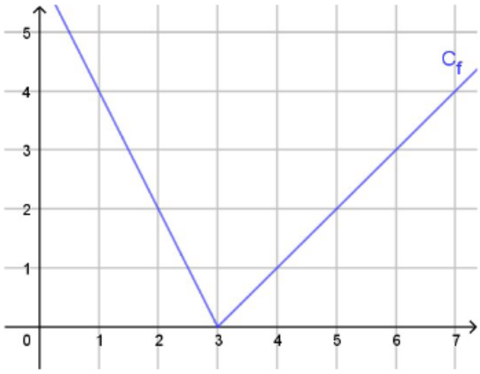
$\int_1^3 f(x)\, dx =$



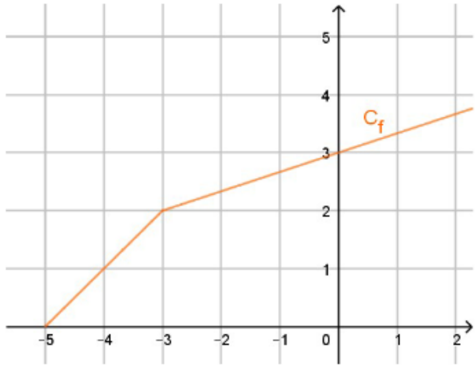
$\int_{-3}^1 f(t)\, dt =$



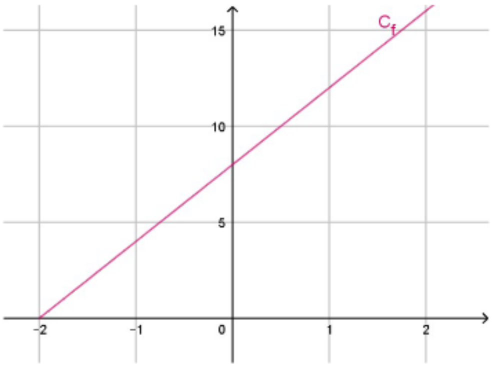
$\int_{-1}^5 f(t)\, dt =$



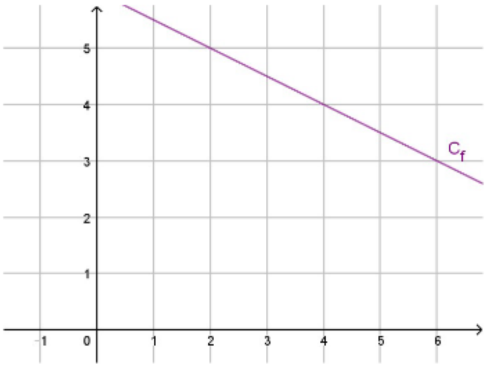
$\int_1^7 f(x)\, dx =$



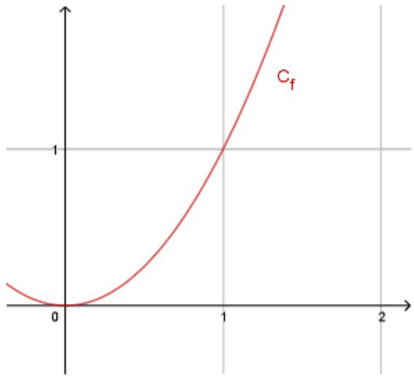
$\int_{-5}^0 f(x)\, dx =$



$\int_{-2}^1 4x + 8\, dx =$



$\int_2^5 -0{,}5t + 6\, dt =$



$\int_0^1 x^2\, dx \approx$

Remarques :

- Si les bornes d'intégration sont indentiques : $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si les bornes d'intégration sont données dans le mauvais ordre : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Si la fonction est constante de valeur $k \in \mathbb{R}_+$, alors $\int_a^b k\, dx = k(b-a)$

Cette intégrale correspond à l'aire d'un rectangle.

- $\int_1^5 f(t)\, dt = 3 \times 4 = 12.$ *C'est l'aire d'un rectangle.*
- $\int_1^3 f(x)\, dx = 6 + 2 = 8.$ *C'est l'aire d'un rectangle et d'un triangle rectangle*

isocèle.

•$\int_{-3}^{1} f(t)\,dt = 6$. *On compte 4 carreaux pleins, et ensuite on complète par assemblage pour trouver 2 carreaux de plus.*

•$\int_{-1}^{5} f(t)\,dt = 9 + 3 = 12$. *Cette fonction bizarre est dite « constante par morceaux ». On ajoute l'aire d'un carré et d'un rectangle.*

•$\int_{1}^{7} f(x)\,dx = 4 + 8 = 12$. *Un triangle rectangle et un triangle rectangle isocèle.*

•$\int_{-5}^{0} f(x)\,dx = 2 + 6 + 1{,}5 = 9{,}5$.

•$\int_{-2}^{1} 4x + 8\,dx$. *Plus difficile : on voit que c'est un triangle rectangle dont un côté mesure 3 unités, mais on doit calculer la longueur de l'autre côté.*

$4 \times 1 + 8 = 12$, *donc* $\int_{-2}^{1} 4\mathrm{x} + 8\,\mathrm{dx} = \frac{12\times 3}{2} = 18$.

•$\int_{2}^{5} -0{,}5t + 6\,dt$ *À nouveau, c'est difficile :* $-0{,}5 \times 2 + 6 = 5$, *et* $-0{,}5 \times 5 + 6 = 3{,}5$. *On ajoute donc l'aire d'un rectangle de longueur 3 et de hauteur 3,5, et l'aire d'un triangle rectangle de côtés 3 et 1,5.*

$\int_{2}^{5} -0{,}5t + 6\,dt = 3 \times 3{,}5 + \frac{3\times 1{,}5}{2} = 10{,}5 + 2{,}25 = 12{,}75$.

•$\int_{0}^{1} x^2\,dx \approx 0{,}3$ *peut-être ? On ne sait pas encore calculer cette aire.*

1b. Approximations

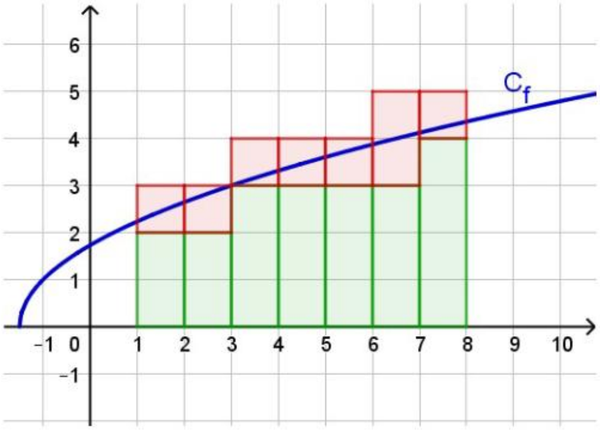
On peut encadrer l'intégrale de f en partageant l'intervalle $[a;b]$ en segments.

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2x+3}$.
On ne connaît pas (encore) de méthode pour la calculer, mais on sait que l'intégrale

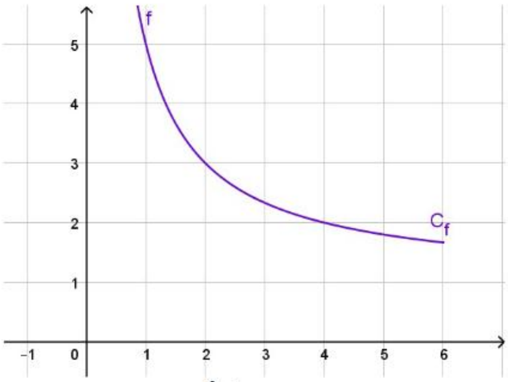
$$\int_1^8 \sqrt{2x+3}\ dx$$

est comprise entre l'aire des rectangles verts,
et la somme de l'aire des rectangles verts et rouges. Ainsi :

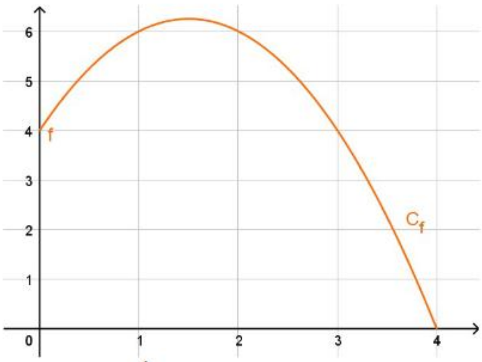
$$< \int_1^8 \sqrt{2x+3}\ dx <$$



Utiliser cette méthode pour encadrer ces deux autres intégrales.



$$< \int_1^6 \frac{4}{t} + 1\ dt <$$



$$< \int_0^4 -x^2 + 3x + 4\ dx <$$

• $20 < \int_1^8 \sqrt{2x+3}\, dx < 28$ *en comptant les carrés verts en-dessous, et en y ajoutant les carrés rouges.*

• $9 < \int_1^6 \frac{4}{t} + 1\ dt < 15$ *en appliquant la même méthode : il y 9 « carrés pleins » en-dessous de la courbe, et on y ajoute 6 « carrés entamés ».*

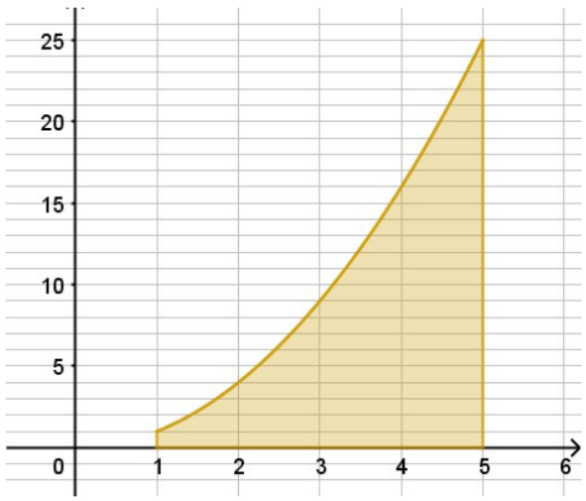
• $14 < \int_0^4 -x^2 + 3x + 4\ dx < 23$

Approximation des intégrales : pour approcher une intégrale,
on peut calculer la moyenne de ses valeurs en n points $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ régulièrement espacés :

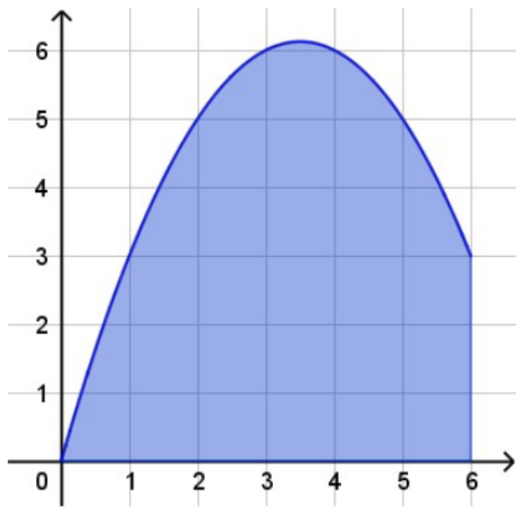
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

L'intégrale correspond à la limite de cette somme quand $n \to +\infty$.

Donner une approximation par une somme des aires suivantes :



$\int_1^5 x^2\, dx \approx$



$\int_0^6 \frac{x(7-x)}{2} dx \approx$

• On utilise 5 points régulièrement espacés (de 1 en 1) sur l'intervalle [1 ; 5].
$\int_1^5 x^2\, dx \approx \frac{5-1}{5} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \approx \frac{4}{5} \times 55 \approx 44.$
• On utilise 7 points régulièrement espacés (de 1 en 1) sur l'intervalle [0 ; 6], en lisant l'image de ces nombres sur l'axe des abscisses.

$$\int_0^6 \frac{x(7-x)}{2}\, dx \approx \frac{6-0}{7} \times (0+3+5+6+6+5+3) \approx \frac{6}{7} \times 28 \approx 24$$

2. Relation avec les primitives

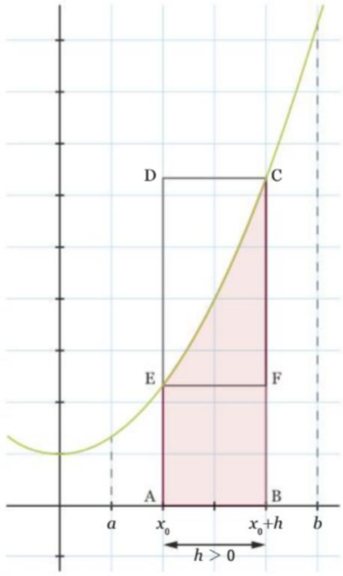
2a. Théorème fondamental

f est toujours continue et positive sur $[a; b]$.

Propriété : La fonction $F_a : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ définie sur $[a; b]$ est la primitive de f qui s'annule en a.

<u>Rappel</u> : f est dérivable en x si la limite en 0 du taux d'accroissement : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.

Cette limite correspond alors au <u>nombre dérivé</u> $f'(x)$.



<u>Démonstration de la propriété</u> :

Soit f continue et à valeurs positives sur un segment $[a; b]$.

Nous allons montrer que $F_a : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Soit $x_0 \in [a; b]$. Il s'agit de montrer que $\boldsymbol{F'_a(x_0) = f(x_0)}$.

a. On considère $\underline{h > 0}$ tel que $(x_0 + h) \in [a; b]$.

Donner une interprétation graphique de $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)$ en justifiant.

b. En utilisant les rectangles ci-contre, justifier alors l'inégalité :

$$hf(x_0) \leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq hf(x_0 + h)$$

c. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h}$$

d. On admet que le même raisonnement peut être appliqué pour $\underline{h < 0}$. Conclure.

a. Par définition, $F_a(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$ est l'aire sous la courbe entre le point d'abscisse a et le point d'abscisse $x_0 + h$.
$F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$ est l'aire sous la courbe entre le point d'abscisse a et le point d'abscisse x_0.
Ainsi, la différence $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)$ est donc l'aire sous la courbe entre le point d'abscisse x_0 et le point d'abscisse $x_0 + h$: cela correspond à l'aire indiquée en rouge.

b. Le rectangle $ABFE$ a pour longueur h et largeur $f(x_0)$, donc son aire est $hf(x_0)$.
Le rectangle $ABCD$ a pour longueur h et largeur $f(x_0 + h)$, donc son aire est $hf(x_0 + h)$.
L'aire rouge étant comprise entre ces deux aires de rectangles, on a bien

$$hf(x_0) \leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq hf(x_0 + h)$$

c. En divisant cette inégalité par h qui est positif, on a :

$$f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$

Or f étant continue, $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

d. Si cela fonctionne aussi pour h négatif, alors $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

On en déduit que les limites à gauche et à droite de $\frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}$ sont égales.

Or cette limite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}$ correspond au nombre dérivé ${F_a}'(x_0)$!

On en déduit que $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

Autrement dit, la fonction F_a est bien une primitive de f.

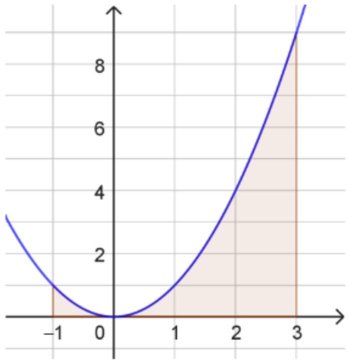
2b. Calculs avec une primitive

Propriété : Soit F n'importe quelle primitive de f. Alors :

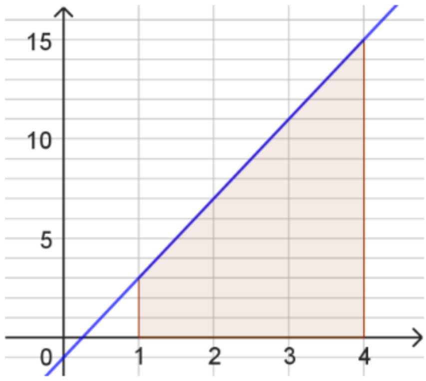
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarque : L'expression $F(b) - F(a)$ peut se noter $[F(x)]_a^b$.

Exemple 1 On a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Exprimer l'aire coloriée à l'aide d'une intégrale, puis calculer cette aire.



Exemple 2 Même consigne avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 4t - 1$.



Exemple 3 Calculer les intégrales suivantes.

$$A = \int_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad B = \int_4^9 x + \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad C = \int_0^2 e^{2x+1}\,dx \qquad D = \int_1^{10} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Exemple 1 Il s'agit de l'intégrale de f de -1 à 3, c'est-à-dire $\int_{-1}^3 x^2\,dx$.

La fonction $F(t) = \frac{t^3}{3}$ est une primitive de f. Ainsi :

$$\int_{-1}^{3} x^2 = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

Exemple 2 Il s'agit de l'intégrale de f de 1 à 4, c'est-à-dire $\int_1^4 4t - 1\,dt$.

La fonction $F(t) = 2t^2 - t$ est une primitive de f. Ainsi :

$\int_1^4 4t - 1\,dt = (2 \times 4^2 - 4) - (2 \times 1^2 - 1) = 28 - 1 = 27.$

Exemple 3 *Ici, j'utilise la notation* $[\mathrm{F(x)}]_\mathrm{a}^\mathrm{b}$ *pour aller plus vite : cela permet de ne pas nommer les fonctions* f *et* F *à chaque calcul.*

$$A = \int_1^5 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^5 = \left(-\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

$$B = \int_4^9 x + \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}\right]_4^9 = \left(\frac{9^2}{2} + 2\sqrt{9}\right) - \left(\frac{4^2}{2} + 2\sqrt{4}\right)$$

$$= (40{,}5 + 6) - (8 + 4) = 46{,}5 - 12 = 34{,}5$$

$$C = \int_0^2 e^{2x+1} dx = \left[\frac{e^{2x+1}}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{e^5}{2} - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{e^5}{2} - \frac{1}{2}$$

Pour l'intégrale D, nous allons utiliser une primitive d'une forme $\mathrm{u}'\mathrm{u}$.

$$D = \int_1^{10} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{10} \frac{1}{x} \times \ln x \, dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{10} = \frac{(\ln 10)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{(\ln 10)^2}{2}$$

Notez que $(\ln 10)^2$ *ne peut pas s'écrire plus simplement, il n'y a pas de formule pour ça.*

3. Calcul dans le cas général

3a. Calculs d'aire

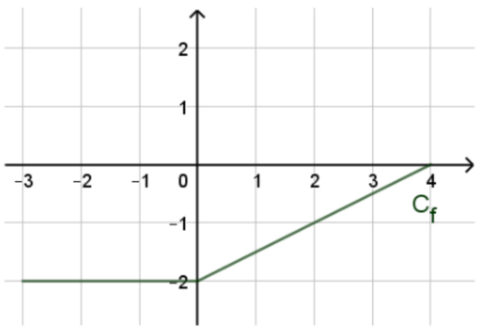
Maintenant, f est continue, mais n'est plus forcément positive sur $[a;b]$.

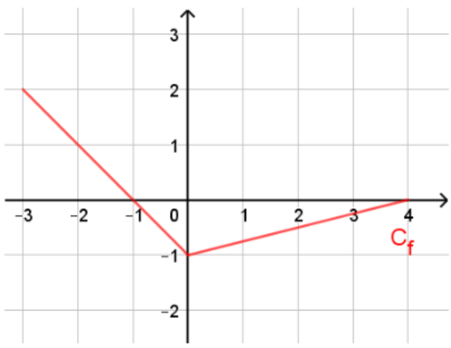
Définition : si $c \in [a;b]$, que f est positive sur $[a;c]$ et négative sur $[c;b]$, alors on définit l'intégrale de f sur $[a;b]$ ainsi :

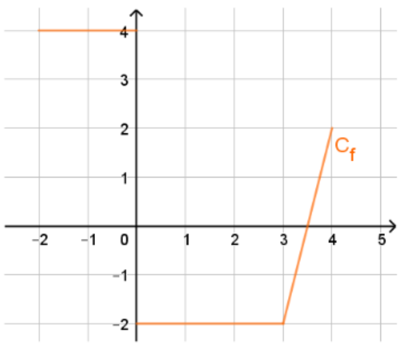
$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_c^b (-f)$$

Remarque : la partie de la courbe sous l'axe des abscisses, où f est négative, « contribue négativement » à l'intégrale.

Dans chaque cas, délimiter le domaine de l'intégrale, puis donner sa valeur.







$\int_{-3}^{4} f(t)\,dt =$

$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx =$

$\int_{-2}^{4} f(t)\,dt =$

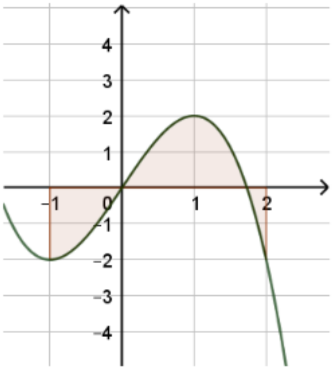
- $\int_{-3}^{4} f(t)\,dt = -6 - 4 = -10$. *Tout ce qui est en-dessous de l'axe des abscisses est « compté en négatif ».*
- $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$. *On ajoute l'aire du triangle de gauche, et on soustrait l'aire du triangle sous l'axe des abscisses.*
- $\int_{-2}^{4} f(t)\,dt = 8 - 6 - 0{,}5 + 0{,}5 = 2$.

3b. Calculs avec une primitive

Propriété (admise) : Soit F n'importe quelle primitive de f.
Alors, de même que pour les fonctions positives :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple 1
Calculer l'intégrale ci-dessous.



$$I = \int_{-1}^{2} 3t - t^3\, dt$$

Exemple 2
Calculer :

$$I_1 = \int_1^9 \frac{5}{\sqrt{x}} dx$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(e^x + 3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$I_3 = \int_{-1}^{0} \frac{12t}{2t^2+1} dt$$

Exemple 1

$$I = \int_{-1}^{2} 3t - t^3 dt = \left[\frac{3t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{3\times 2^2}{2} - \frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{3\times(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right)$$
$$= (6-4) - (1{,}5 - 0{,}25) = 2 - 1{,}25 = 0{,}75$$

Exemple 2

$$I_1 = \int_1^9 \frac{5}{\sqrt{x}} dx = \left[5\times 2\sqrt{x}\right]_1^9 = 10\sqrt{9} - 10\sqrt{1} = 30 - 10 = 20$$

$$I_2 = \int_1^2 e^x + 3x^2 - \frac{1}{x^2} dx = \left[e^x + x^3 + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(e^2 + 2^3 + \frac{1}{2}\right) - \left(e^1 + 1^3 + \frac{1}{1}\right)$$
$$= (e^2 + 8 + 0{,}5) - (e + 1 + 1) = e^2 + 8{,}5 - e - 2 = e^2 - e + 6{,}5$$

Pour I_3*, on essaie de retrouver la forme* $\frac{\mathrm{u}'}{\mathrm{u}}$.

$$I_3 = \int_{-1}^{0} \frac{12t}{2t^2+1} dt = \int_{-1}^{0} 3\times\frac{4t}{2t^2+1} dt = \left[3\ln(2t^2+1)\right]_{-1}^{0}$$
$$=3\ln(2\times 0^2 + 1) - 3\ln(2\times(-1)^2 + 1) = 3\ln(1) - 3\ln(3) = -3\ln(3)$$

4. Propriétés de l'intégrale

4a. Opérations

Propriété : Soient f et g fonctions continues, un réel λ, et $c \in [a;b]$.
Alors :

(linéarité) : $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

(relation de Chasles) : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Exemple En utilisant la linéarité de l'intégrale, calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^5 7 - e^{5-x}\, dx \qquad J = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)\, dx$$

• $\displaystyle I = \int_0^5 7 - e^{5-x} dx = \int_0^5 7dx - \int_0^5 e^{5-x} dx$

Or $\int_0^5 7\, dx = 7 \times 5 = 36$: c'est l'aire d'un rectangle.

De plus, $\int_0^5 e^{5-x} dx = [-e^{5-x}]_0^5 = -e^{5-5} - (-e^{5-0}) = -e^0 + e^5 = e^5 - 1$

Ainsi $I = 35 - (e^5 - 1) = 36 - e^5$

• $\displaystyle J = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx$

Or $\int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Ainsi $J = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1.$

4b. Intégration par parties

Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables dont la dérivée est continue. Alors :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

La formule d'intégration par parties est utile quand la fonction à intégrer est un produit d'une fonction dont on peut facilement trouver la primitive, par une autre fonction dont la dérivée est plus « simple ».
L'intégrale qui reste après avoir appliqué cette formule peut être un polynôme, ou une fonction plus facile.

Exemple 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e 3t^2 \ln t \; dt \qquad J = \int_0^\pi x\cos(x)\, dx$$

Exemple 2 Montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$$

Exemple 3 Calculer l'intégrale ci-dessous en posant $u'(x) = 2xe^{x^2-1}$ et $v(x) = x^2$.

$$I = \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx$$

Exemple 4 En s'inspirant de l'exemple 3, calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx$$

Exemple 5 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $g(x) = 5te^{-0,1t} + 20$. Calculer $\int_0^4 g(t)\,dt$.

Exemple 1 • On pose $u'(t) = 3t^2$ et $v(t) = \ln t$. On a alors $u(t) = t^3$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

$$I = \int_1^e 3t^2 \ln t \, dt$$

$$= [t^3 \times \ln(t)]_1^e - \int_1^e t^3 \times \frac{1}{t}\, dt$$

$$= (e^3 \times \ln(e)) - (1^3 \times \ln(1)) - \int_1^e t^2 \; dt$$

$$= e^3 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^e$$

$$= e^3 - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2e^3}{3} + \frac{1}{3}$$

• On pose $u'(t) = \cos(x)$ et $v(t) = x$. On a alors $u(t) = \sin(x)$ et $v'(t) = 1$.

$J = \int_0^\pi x\cos(x)\,dx$

$= [\sin(x) \times x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) \times 1 dx$

$= [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\,dx$

$= (\pi\sin(\pi) - 0\sin(0)) - [-\cos(x)]_0^\pi$ *, or* $\sin(\pi)$ *est égal à 0*

$= [\cos(x)]_0^\pi$

$= \cos(\pi) - \cos(0)$

$= -1 - 1$

$= -2$

Exemple 2 On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x$. On a $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.
On réalise une intégration par parties :

$\int_0^1 xe^{-x}\ dx$

$= [-e^{-x} \times x]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 1\ dx$

$= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx$

$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1$

$= -e^{-1} + [-e^{-1} - (-e^{-0})]$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 1$

$= -2e^{-1} + 1$

$= -\frac{2}{e} + 1$

$= \frac{e-2}{e}$

Exemple 3 *L'énoncé nous fournit l'idée de décomposer* $2x^3e^{x^2-1}$ *en* $2xe^{x^2-1} \times x^2$*, car le facteur* $2xe^{x^2-1}$ *est alors de la forme* $u'e^u$ *: on peut en trouver une primitive.*
On pose $u'(x) = 2xe^{x^2-1}$ et $v(x) = x^2$. On a $u(x) = e^{x^2-1}$ et $v'(x) = 2x$.

$I = \int_{-1}^1 2x^3e^{x^2-1}dx$

$= \int_{-1}^1 2xe^{x^2-1} \times x^2dx$

$= \left[e^{x^2-1} \times x^2\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^{x^2-1} \times 2x\,dx$

La fonction dans cette nouvelle intégrale est encore de la forme $\mathrm{u}'\mathrm{e}^{\mathrm{u}}$*.*

$= \left(e^{1^2-1} \times 1^2 - e^{(-1)^2-1} \times (-1)^2\right) - \left[e^{x^2-1}\right]_{-1}^{1}$

$= (e^0 - e^0) - \left(e^{1^2-1} - e^{(-1)^2-1}\right)$

$= 0 - (e^0 - e^0)$

$= 0$

Exemple 4

Au vu de la fonction à intégrer, on essaie de faire apparaitre la forme $\frac{\mathrm{u}'}{\mathrm{u}^2}$*.*

Pour x réel :

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}x^2 \times \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Ainsi, en posant $u'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$, on a $u(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = x$.

$I = \int_0^2 2x^3 e^{x^2-1}\, dx$

$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{2x}{(1+x^2)^2}\, dx$

$= \left[-\frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{1+x^2} \times x\, dx$

$= \left[-\frac{x^2}{2(1+x^2)}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\, dx$

Dans la nouvelle intégrale, on essaie d'obtenir la forme $\frac{\mathrm{u}'}{\mathrm{u}}$*.*

$= -\frac{2^2}{2(1+2^2)} + \frac{1}{2} \times \int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$

$= -0{,}4 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^2$

$= -0{,}4 + \frac{1}{2}\ln(5)$

Exemple 5

On utilise d'abord la linéarité de l'intégrale pour ôter tous les termes et facteurs possibles avant de réaliser l'intégration par parties.

$\int_0^4 g(t)dt$

$= \int_0^4 5te^{-0{,}1t} + 20\, dt$

$= 5\int_0^4 te^{-0{,}1t}\, dt + \int_0^4 20\, dt$

Calculons $I = \int_0^4 te^{-0,1t}\, dt$. On pose $u'(t) = e^{-0,1t}$ et $v(t) = t$.

Ainsi, $u(t) = \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} = -10e^{-0,01t}$ et $v'(t) = 1$. On réalise l'IPP :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^4 te^{-0,1t}\, dt \\
&= [-10e^{-0,1t} \times t]_0^4 - \int_0^4 -10e^{-0,1t}\, dt \\
&= -10 \times e^{-0,1\times 4} \times 4 + 10 \int_0^4 e^{-0,1t}\, dt \\
&= -40e^{-0,4} + 10[-10e^{-0,1t}]_0^4 \\
&= -40e^{-0,4} + 10(-10e^{-0,4} + 10e^0) \\
&= -140e^{-0,4} + 100
\end{aligned}$$

On revient au calcul initial.

$$\int_0^4 g(t)dt = 5I + \int_0^4 20\, dt$$

$$= 5(-140e^{-0,4} + 100) + 20 \times 4$$

$$= -700e^{-0,4} + 580$$

4c. Comparaisons

Propriété : Soient deux fonctions continues f et g, tel que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Propriétés :

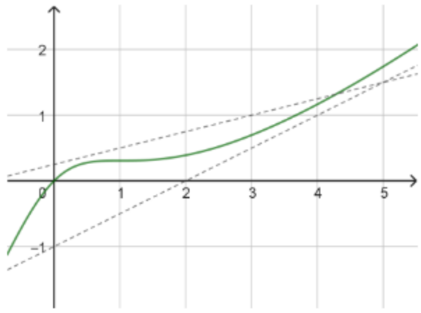
- Si M est un majorant de f, i.e. pour tout $x \in [a;b]$, $\boldsymbol{f(x) \leq M}$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
- Si m est un minorant de f, i.e. pour tout $x \in [a;b]$, $\boldsymbol{m \leq f(x)}$, alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$

Propriété : Soit f continue et positive telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Alors f est la fonction nulle.

Exemple On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(x^2+1)$

1. On a représenté la fonction f ci-contre. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)dx$$



2. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2;4]$, on a l'encadrement : $0{,}5x - 1 \leq f(x) \leq 0{,}25x + 0{,}25$.
En déduire l'encadrement $1 \leq I \leq 2$.

1. L'intégrale I correspond à l'aire de la surface entre la courbe C_f et l'axe des abscisses, entre les points d'abscisses 2 et 4.

2. $\int_2^4 0{,}5x - 1\,dx$
$= [0{,}25x^2 - x]_2^4$
$= (0{,}25 \times 4^2 - 4) - (0{,}25 \times 2^2 - 2)$
$= (4-4) - (1-2)$
$= 1$
et $\int_2^4 0{,}25x + 0{,}25\,dx$
$= [0{,}125x^2 + 0{,}25x]_2^4$
$= (0{,}125 \times 4^2 + 0{,}25 \times 4) - (0{,}125 \times 2^2 + 0{,}25 \times 2)$
$= (2+1) - (0{,}5+0{,}5)$
$= 2$
On déduit de l'inégalité admise $0{,}5x - 1 \leq f(x) \leq 0{,}25x + 0{,}25$
que $\int_2^4 0{,}5x - 1\,dx \leq \int_2^4 f(x)\,dx \leq \int_2^4 0{,}25x + 0{,}25\,dx$
et ainsi $1 \leq I \leq 2$.

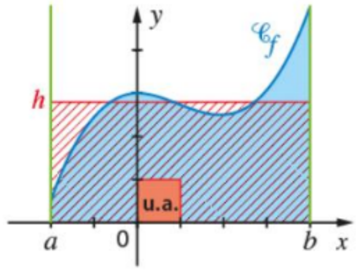
5. Applications

5a. Valeur moyenne

Définition : On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre :

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Si f est positive sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f sur cet intervalle est égale à la hauteur h du rectangle de largeur $b - a$ qui a la même aire que sous la courbe C_f.
Ci-contre, l'aire en u.a. du rectangle hachuré est égale à l'aire, en u.a., sous la courbe de f.



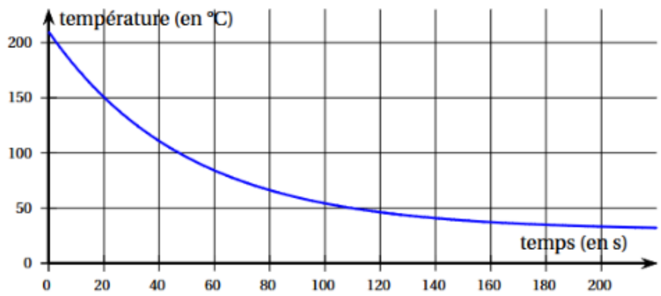
Exemple 1 La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ par $p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2011.
a. Calculer la valeur moyenne μ de la fonction p sur l'intervalle $[8; 10]$.
Donner la valeur exacte, puis sa valeur arrondie au centième.
b. Donner une interprétation de ce résultat.

Exemple 2 Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue initialement à 210 °C.
On admet que la température (en degrés Celsius) du matériau en fonction du temps (en secondes) est modélisée par une fonction f, solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \; y' + 0{,}02y = 0{,}6$$

1. Déterminer l'expression de la fonction f.
2. La fonction f a été représentée graphiquement ci-contre.
Calculer la température moyenne sur les 100 premières secondes.



Exemple 1 *On essaie d'utiliser la forme $\frac{u'}{u}$.*

$$\mu = \frac{1}{10-8}\int_8^{10} \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\times\frac{1}{0{,}2}\int_8^{10}\frac{0{,}2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$

$$\mu = \frac{1}{0{,}4}[\ln(1+e^{0,2x})]_8^{10}$$

$\mu = 2{,}5(\ln(1+e^2) - \ln(1+e^{1,6})) \approx 0{,}85$. Cela signifie que la moyenne du taux d'équipement de cet appareil entre les années 2019 et 2021 est de 85%.

Exemple 2

1. (E) se réécrit $y' = -0{,}02y + 0{,}6$.
Les solutions sont $f(t) = Ke^{-0{,}02t} - \frac{0{,}6}{-0{,}02} = Ke^{-0{,}02t} + 30$ avec $K \in \mathbb{R}$.
Or d'après la condition initiale,
$f(0) = 210 \Leftrightarrow Ke^{-0{,}02\times 0} + 30 = 210 \Leftrightarrow K = 180$.
Ainsi, $f(t) = 180e^{-0{,}02t} + 30$

2. D'après la formule, on doit calculer :

$$M = \frac{1}{100-0}\int_0^{100} f(t)dt$$
$$M = 0{,}01\int_0^{100} 180e^{-0{,}02t} + 30\, dt$$
$$M = 0{,}01\left(180\int_0^{100} e^{-0{,}02t}dt + \int_0^{100} 30\, dt\right)$$
$$M = 0{,}01\left(180\left[\frac{e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}\right]_0^{100} + 3\,000\right)$$
$$M = 1{,}8\left[-\frac{e^{-0{,}02t}}{0{,}02}\right]_0^{100} + 30$$
$$M = 1{,}8[-50e^{-0{,}02t}]_0^{100} + 30$$
$$M = 1{,}8(-50e^{-0{,}02\times 100} + 50e^{-0{,}02\times 0}) + 30$$
$$M = -90e^{-2} + 90 + 30$$
$$M = -90e^{-2} + 120 \approx 107\ °C$$

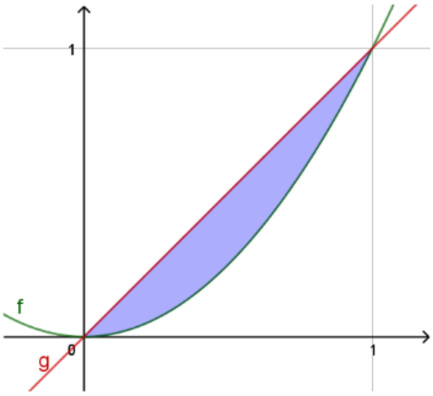
5b. Aire entre deux courbes

Propriété : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que pour tout $x \in [a;b]$, $g(x) \geq f(x)$, alors l'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ entre a et b est :

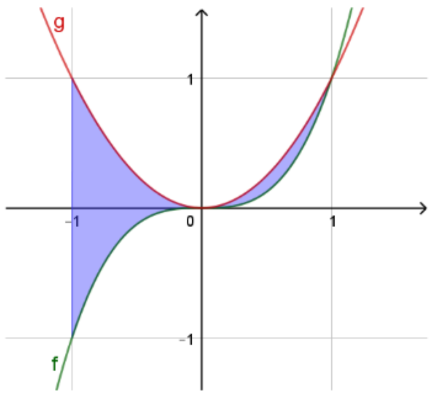
$$\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$$

Exemples Dans chaque cas, calculer l'aire de la surface coloriée entre les fonctions f et g.

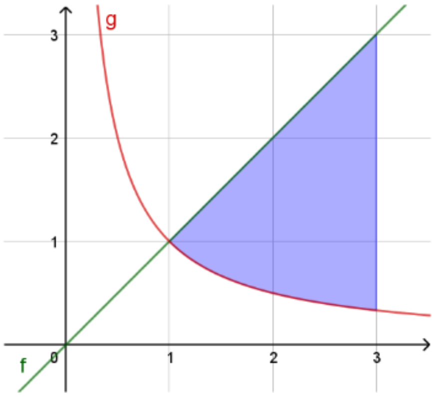
a. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $[0;1]$



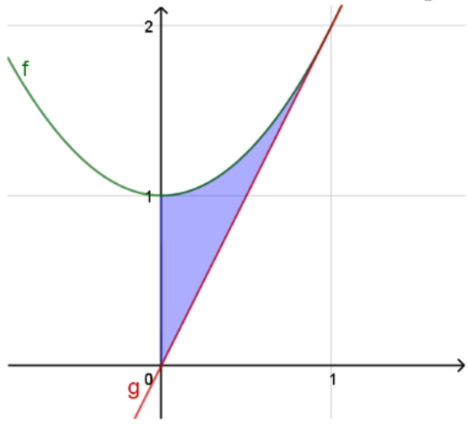
b. $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$ sur $[-1;1]$



c. $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1;3]$



d. $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x$ sur $[0;1]$



a. La courbe de g est au-dessus de celle de f sur l'intervalle $[0;1]$.

$$A = \int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

b. La courbe de g est au-dessus de celle de f sur l'intervalle $[-1;1]$.

$$A = \int_{-1}^1 x^2 - x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$$

c. La courbe de f est au-dessus de celle de g sur l'intervalle $[1;3]$.

$$A = \int_1^3 x - \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} - ln(x)\right]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2} - \ln(3)\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln(1)\right) = 4 - \ln(3)$$

d. La courbe de f est au-dessus de celle de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$A = \int_0^1 x^2 + 1 - 2x\ dx = \left[\frac{x^3}{3} + x - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}$$

5c. Suites d'intégrales

Exemple

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = x^n e^x$.
On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère du plan. On pose également :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$$

1. On appelle F_1 la fonction définie sur $[0; 1]$ par $F_1(x) = (x - 1)e^x$.
Vérifier que F_1 est une primitive de f_1, puis calculer I_1.

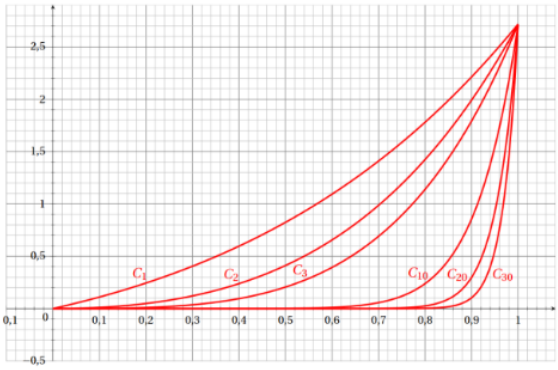
2. A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$

3. En déduire la valeur de I_2.

4. On considère la fonction `mystere` écrite ci-contre dans le langage Python :
À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

```
from math import e
def mystere(n):
a = 1
L = [a]
for i in range(1,n):
    a = e - (i + 1)*a
    L.append(a)
return L
```

5. Sur le graphique ci-contre, on a représenté les courbes C_n pour différentes valeurs de n.



a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

6. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n \, dx$$

7. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

1. Pour $x \in [0; 1]$, $f_1(x) = xe^x$.
$F_1'(x) = 1e^x + (x - 1)e^x = xe^x = f_1(x)$.
Ainsi, F_1 est une primitive de f_1.
$I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = F_1(1) - F_1(0) = (1 - 1)e^1 - (0 - 1)e^0 = 1$.

2. *L'intégration par parties sert souvent dans les exercices sur les suites d'intégrales à établir une formule de récurrence sur la suite. Oui, c'est affreux.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons I_{n+1}.

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$$

Le fait de devoir retrouver I_n, donc x^n dans l'intégrale, nous invite à dériver x^{n+1} pour obtenir du x^n.
On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x^{n+1}$. On a $u(x) = e^x$ et $v'(x) = (n + 1)x^n$.

$$I_{n+1} = [e^x x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 (n + 1)x^n e^x dx$$

$$= e^1 \times 1^{n+1} - (n + 1) \int_0^1 x^n e^x dx$$

$$= e - (n + 1)I_n$$

3. $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$.

4. La fonction renvoie une liste de 5 éléments : I_0, I_1, I_2, I_3 et I_4.

5. a. I_n correspond à l'aire entre la courbe de f_n et l'axe des abscisses, pour x compris entre 0 et 1.
b. La suite (I_n) semble tendre vers 0, car l'aire semble se rétrécir au fur et à mesure que n croît.

6. Pour x réel, la fonction exp étant croissante, on a $e^0 \leq e^x \leq e^1$, soit $1 \leq e^x \leq e$, d'où $0 \leq e^x \leq e$.
On multiplie cette dernière inégalité par x^n : $0 \leq x^n e^x \leq x^n e$
On applique ensuite l'intégrale de 0 à 1 :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq \int_0^1 x^n e\,dx$$

$$0 \leq I_n \leq e\int_0^1 x^n\,dx$$

7. Cependant :

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

(I_n) est donc encadrée par deux suites de même limite 0.
Sa limite est donc 0 par le théorème des gendarmes.