Correction des exercices d'intégration par parties

Exercice 1

On fait comme on nous dit : on pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.
On réalise une intégration par parties.

$$I = [e^x \times x]_0^2 - \int_0^2 e^x \times 1\,dx$$
$$= 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 e^x\,dx$$
$$= 2e^2 - [e^x]_0^2$$
$$= 2e^2 - (e^2 - e^0)$$
$$= e^2 + 1$$

Exercice 2 **a.** On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$. On a alors $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. On réalise une IPP.

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_2^8 - \int_2^8 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\,dx$$
$$I = \frac{8^2}{2}\ln 8 - \frac{2^2}{2}\ln 2 - \int_2^8 \frac{x}{2}\,dx$$
$$I = 32\ln 8 - 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^8$$
$$I = 32\ln(2^3) - 2\ln 2 - \left(\frac{8^2}{4} - \frac{2^2}{4}\right)$$
$$I = 32 \times 3\ln 2 - 2\ln 2 - (16 - 1)$$
$$I = 94\ln 2 - 15$$

b. On pose $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = 2t + 1$. On a alors $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = 2$. On réalise une IPP.

$$J = [-e^{-t}(2t+1)]_0^{10} - \int_0^{10} -e^{-t} \times 2\,dt$$
$$J = -e^{-10}(2 \times 10 + 1) - \left(-e^{-0}(2 \times 0 + 1)\right) + \int_0^{10} 2e^{-t}\,dt$$
$$J = -21e^{-10} + 1 + [-2e^{-t}]_0^{10}$$
$$J = -21e^{-10} + 1 - 2e^{-10} - (-2e^{-0})$$
$$J = -23e^{-10} + 3$$

Exercice 3 **1.** On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = 1 - x^2$. On a alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = -2x$. On réalise l'IPP :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = [e^x(1-x^2)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x \times (-2x)dx$$
$$= e^1(1-1^2) - e^{-1}(1-(-1)^2) - \int_{-1}^{1} -2xe^x dx$$

Or les deux premiers termes sont nuls. Il ne reste que l'intégrale de droite. En utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{-1}^{1} xe^x dx.$$

2. On doit d'abord calculer cette surface S, qui n'est autre que $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, soit $2\int_{-1}^{1} xe^x dx$.

Calculons juste $\int_{-1}^{1} xe^x dx$, nous multiplierons par 2 ensuite. Cette intégrale se calcule elle aussi avec une IPP !

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$. Ainsi :

$$\int_{-1}^{1} xe^x dx$$

$$= [e^x \times x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx$$

$$= 1e^1 - (-1e^{-1}) - [e^x]_{-1}^{1}$$

$$= e + e^{-1} - (e^1 - e^{-1})$$

$$= 2e^{-1}$$

Ainsi, $S = 2\int_{-1}^{1} xe^x dx = 2 \times 2e^{-1} = 4e^{-1}$.

Enfin, $V = 3 \times S = 3 \times 4e^{-1} = 12e^{-1} \approx 4{,}4 \text{ cm}^3$.

Exercice 4

a. Ici, la partie surprenante vient du fait que la borne supérieure de l'intégrale est une variable t.

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x + 2$. On a alors $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$. On réalise une IPP.

$$I(t) = [-e^{-x}(x+2)]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -e^{-x} \times 1\, dx$$

$$I(t) = -e^{-t}(t+2) - \left(e^{-(-2)}(-2+2)\right) + \int_{-2}^{t} e^{-x}\, dx$$

$$I(t) = -e^{-t}(t+2) + [-e^{-x}]_{-2}^{t}$$

$$I(t) = -e^{-t}(t+2) - e^{-t} - e^{-(-2)}$$

$$I(t) = -e^{-t}(t+2+1) - e^2$$

$$I(t) = -e^{-t}(t+3) - e^2$$

$$I(t) = (-t-3)e^{-t} - e^2$$

b. La surface sous la courbe de f pour $x \in [-2; +\infty[$ est une surface non limitée, qui continue à l'infini.

Pourtant, l'aire de cette surface est la limite de $I(t)$ en $+\infty$. Or :

$$I(t) = (-t-3)e^{-t} + e^2 = -\frac{t}{e^t} - \frac{3}{e^t} + e^2$$

$\frac{t}{e^t}$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$ par croissances comparées, et $\frac{3}{e^t}$ tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Finalement, la limite de $I(t)$ quand $t \to +\infty$ est e^2. L'aire de la surface est donc un nombre réel, alors que cette surface se prolonge à l'infini.