

Exercices d'intégration par parties

Exercice 1 En posant $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$, montrer que l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^2 x e^x dx$$

est égale à $1 + e^2$.

Exercice 2 Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

a. l'intégrale $I = \int_2^8 x \ln(x) dx$ vaut $94 \ln 2 - 15$.

b. l'intégrale $J = \int_0^{10} (2t + 1)e^{-t} dt$ vaut $-23e^{-10} + 3$.

Exercice 3 Un artisan crée des bonbons dont la forme rappelle le profil de la montagne locale. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, représentée ci-contre.

Cette surface est délimitée par la représentation graphique de la fonction f , définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = (1 - x^2)e^x$.

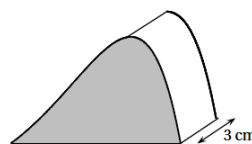


Figure 1

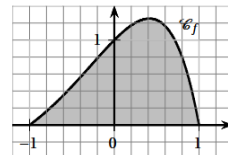


Figure 2

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx$.

2. Le volume V de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon, est donné par $V = 3 \times S$, où S est l'aire, en cm^2 , de la surface grisée. En déduire que ce volume, arrondi à $0,1 \text{ cm}^3$ près, est égal à $4,4 \text{ cm}^3$.

Exercice 4 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

Pour tout nombre réel $t \geq 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I(t) = (-t - 3)e^{-t} + e^2$

b. En déduire un exemple de surface non limitée, dont l'aire est finie.

