

Correction des exercices sur le calcul intégral

Exercice 1

1. Pour que F soit une primitive de f , il faut que F' soit égale à f . Essayons de dériver F en fonction du a et du b fournis dans l'énoncé.

Pour $x \in [0 ; +\infty[$, $F'(x) = ae^{-x+1} + (ax + b) \times (-1)e^{-x+1} = (a - ax - b)e^{-x+1} = (-ax + a - b)e^{-x+1}$

Pour que cette fonction soit égale à f , il faut que $(-ax + a - b)$ soit égal à $(4x - 2)$.

C'est-à-dire que $-a = 4$, soit $a = -4$.

De plus, on doit avoir $a - b = -2 \Leftrightarrow -4 - b = -2 \Leftrightarrow b = -2$.

Ainsi, $F(x) = (-4x - 2)e^{-x+1}$.

2.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3}{2}}^8 f(x) dx \\ &= F(8) - F\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= (-4 \times 8 - 2)e^{-8+1} - \left(-4 \times \frac{3}{2} - 2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} \\ &= -34e^{-7} + 8e^{-0,5} \end{aligned}$$

Visiblement, le calcul n'ira pas plus loin. Une valeur approchée de I est 4,82.

3a. La hauteur du point de départ n'est autre que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(4 \times \frac{3}{2} - 2\right)e^{-\frac{3}{2}+1} = 4e^{-0,5} \approx 2,43$ m.

3b. D'après 2, l'aire du mur est environ 4,82 m². La surface couverte sera de $0,75 \times 4,82 \approx 3,615$ m².

$\frac{3,615}{0,8} \approx 4,5$, donc l'artiste aura besoin de 5 bombes pour réaliser son œuvre. Le 150 mL ne servait à rien.

Exercice 2

1.

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx$$

On réalise une intégration par parties en posant $u'(x) = e^{-x}$ et donc $u(x) = -e^{-x}$.

On pose donc $v(x) = x$ et ainsi $v'(x) = 1$.

$$I_1 = [-e^{-x} \times x]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 1 dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{2}{e}$$

2. Initialisation : pour $n = 0$, on a $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$. Calculons :

$$(0 + 1)I_0 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} = I_1$$

L'égalité est donc vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $I_{n+1} = (n + 1)I_n - \frac{1}{e}$. Calculons I_{n+2} .

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx$$

$$= [x^{n+2} \times (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 x^{n+1} \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -e^{-1} + (n+2) \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= (n+2)I_{n+1} - \frac{1}{e}$$

On a trouvé l'égalité voulue.

3.

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$$

$$I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$$

4. Essayons d'utiliser le reste de l'exercice.

$$J = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x} dx = 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2I_3 - 4I_2 = 2\left(6 - \frac{16}{e}\right) - 4\left(2 - \frac{5}{e}\right) = 4 - \frac{12}{e} \approx -0,41$$

Exercice 3

1. Soit $n > 0$ et $x \in [1; 5]$. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - \ln(x) \times n \times x^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{x^{n-1}(1 - n \ln(x))}{x^{2n}} = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{2n-(n-1)}} = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$$

2. Pour tout $n > 0$, le maximum de f_n est atteint pour un x tel que $f'_n(x) = 0$ Or :

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - n \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

L'ordonnée y vérifie $y = f_n(x)$, soit :

$$y = f_n\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\exp\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{e} \times \ln\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{e} \ln(x)$$

Ainsi, tous les points A_n ont bien des coordonnées $(x; y)$ vérifiant $y = \frac{1}{e} \ln(x)$.

Ils appartiennent bien à la courbe Γ .

3. a. Soit $n > 0$ et $x \in [1; 5]$. Par croissance de la fonction $\ln$, on a $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$.

En divisant par x^n qui est positif, et en remarquant que $\ln(1) = 0$, on obtient :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$$

b. On utilise une primitive :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^5 = -\frac{1}{n-1} \times \left(\frac{1}{5^{n-1}} - \frac{1}{1^{n-1}} \right) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$$

c. L'aire correspond à l'intégrale $\int_1^5 f_n(x) dx$.

Or d'après la question a., cette aire est comprise entre 0 et l'intégrale calculée en question b.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{5^{n-1}} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$.

Ainsi, l'intégrale $\int_1^5 f_n(x) dx$ est comprise entre 0 et une suite qui tend vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, sa valeur limite est également 0.

Exercice 4

Partie A

1. L'algorithme ne fait que calculer des termes d'une suite récurrente.

Au bout de $T_0 = 25$, puis $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25$,

$T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,8125$, et enfin $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,940625 \approx 54^\circ\text{C}$.

2. On montre cette formule par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 = 25 = T_0$

Hérédité : Soit n entier naturel, supposons que $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ Alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,85 \times T_n + 15 \\ &= (100 - 75 \times 0,85^n) \times 0,85 + 15 \\ &= 100 \times 0,85 - 75 \times 0,85^n \times 0,85 + 15 \\ &= 85 + 15 - 75 \times 0,85^{n+1} \\ &= 100 - 75 \times 0,85^{n+1} \end{aligned}$$

On a vérifié la formule au rang $n + 1$. Conclusion : Pour tout n entier naturel, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. La stérilisation débute à la plus petite n -ième minute telle que $T_n > 85$.

$$\begin{aligned} T_n &> 85 \\ \Leftrightarrow 100 - 75 \times 0,85^n &> 85 \\ \Leftrightarrow -75 \times 0,85^n &> -15 \\ \Leftrightarrow 0,85^n &< \frac{15}{75} \\ \Leftrightarrow \ln(0,85^n) &< \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ \Leftrightarrow n \ln(0,85) &< -\ln(5) \\ \Leftrightarrow n &> -\frac{\ln(5)}{\ln(0,85)} \approx 10 \end{aligned}$$

Notez que $\ln(0,85)$ est négatif, ce qui nous permet de changer le sens de l'inégalité.

Ainsi, la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B

1. a. f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout t positif,

$$f'(t) = -75 \times \left(-\frac{\ln 5}{10}\right) e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = \frac{\ln 5}{10} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$$

Ainsi, $f'(t)$ est positif et f est croissante sur $[0; +\infty[$.

b. $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10} \times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - \frac{75}{e^{\ln 5}} = 100 - \frac{75}{5} = 100 - 15 = 85$

Or f est croissante, donc pour t supérieur ou égal à 10, on a bien $f(t) \geq 85$.

a. L'aire $A(25)$ est au moins aussi grande que celle de 4 rectangles délimités par des pointillés, dont l'aire est de 25 u.a. On a donc bien $A(25) > 80$.

b. On calcule l'intégrale de f de 10 à θ , moins l'aire d'un rectangle de largeur $\theta - 10$ et de hauteur 85.

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \int_{10}^{\theta} 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10} \times t} dt - (\theta - 10) \times 85 \\ &= \int_{10}^{\theta} 100 dt - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} \times t} dt - (\theta - 10) \times 85 \\ &= 100(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} \times t} dt - (\theta - 10) \times 85 \\ &= 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10} \times t} dt \end{aligned}$$

c. On calcule donc $A(20)$.

$$\begin{aligned} A(20) &= 15(20 - 10) - 75 \int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10} \times t} dt \\ &= 150 - 75 \left[-\frac{10}{\ln(5)} e^{-\frac{\ln 5}{10} t} \right]_{10}^{20} \\ &= 150 + 75 \times \frac{10}{\ln(5)} \left[e^{-\frac{\ln 5}{10} t} \right]_{10}^{20} \\ &= 150 + \frac{750}{\ln(5)} (e^{-\frac{\ln 5}{10} \times 20} - e^{-\frac{\ln 5}{10} \times 10}) \\ &= 150 + \frac{750}{\ln(5)} (e^{-2 \ln 5} - e^{-\ln 5}) \\ &= 150 + \frac{750}{\ln(5)} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5} \right) \\ &= 150 + \frac{750}{\ln(5)} \times \frac{-4}{25} \\ &= 150 - \frac{120}{\ln(5)} \\ &\approx 75,44 \end{aligned}$$

La stérilisation n'est donc pas terminée au bout de 20 minutes.