

Exercices sur le calcul intégral

Exercice 1 On considère une fonction f , définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (4x - 2)e^{-x+1}$.

On définit également une fonction F , définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = (ax + b)e^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

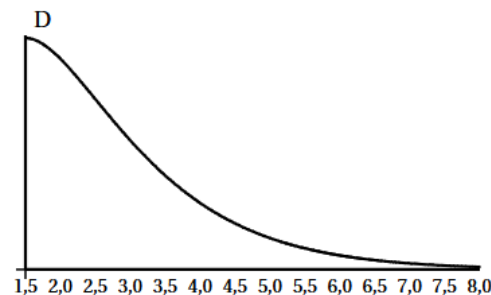
1. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f .
2. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale :

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^8 f(x) dx$$

3. Une municipalité a décidé, de construire une piste de trottinette freestyle. Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\frac{3}{2}; 8]$. L'unité de longueur est le mètre.

a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D .

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75% de la surface du mur. Sachant d'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8 \text{ m}^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.



Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On pose aussi pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1. Calculer I_0 puis I_1 .

2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$

3. En déduire I_2 et I_3 .

4. En déduire l'intégrale suivante : $J = \int_0^1 f(x) dx$

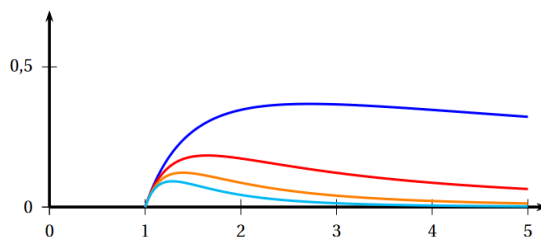
On donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} .

Exercice 3 On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout entier $n > 0$, on note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-contre sont représentées les courbes C_n pour n appartenant à $\{1; 2; 3; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1; 5]$:

$$f'_n(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1; 5]$.

On note A_n le point de la courbe C_n ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation :

$$y = \frac{1}{e} \ln(x)$$

(suite de l'exercice 3)

3. a. Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1; 5]$:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$$

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n , c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe C_n . Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 Les parties A et B sont indépendantes. La partie A ne traite pas de calcul intégral.

On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25^\circ\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100^\circ\text{C}$.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C .

Partie A : modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$. Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme ci-contre :

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

```
def temperature(n) :  
    T = 25  
    for k in range(n) :  
        T = 0.85*T + 15  
    return T
```

Partie B : modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$$

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$
- b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative C_f de f . On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$, est supérieure à 80.

- a. Justifier, à l'aide du graphique donné, que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.
- b. Justifier que, pour $\theta \geq 10$, on a :

$$\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt$$

- c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

