Chapitre 9 – Variations et extremums

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I.

1. Croissance, décroissance, tableau

1a. Sens de variation

La fonction f est dite :

• strictement croissante si pour tous $a, b \in I$:

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

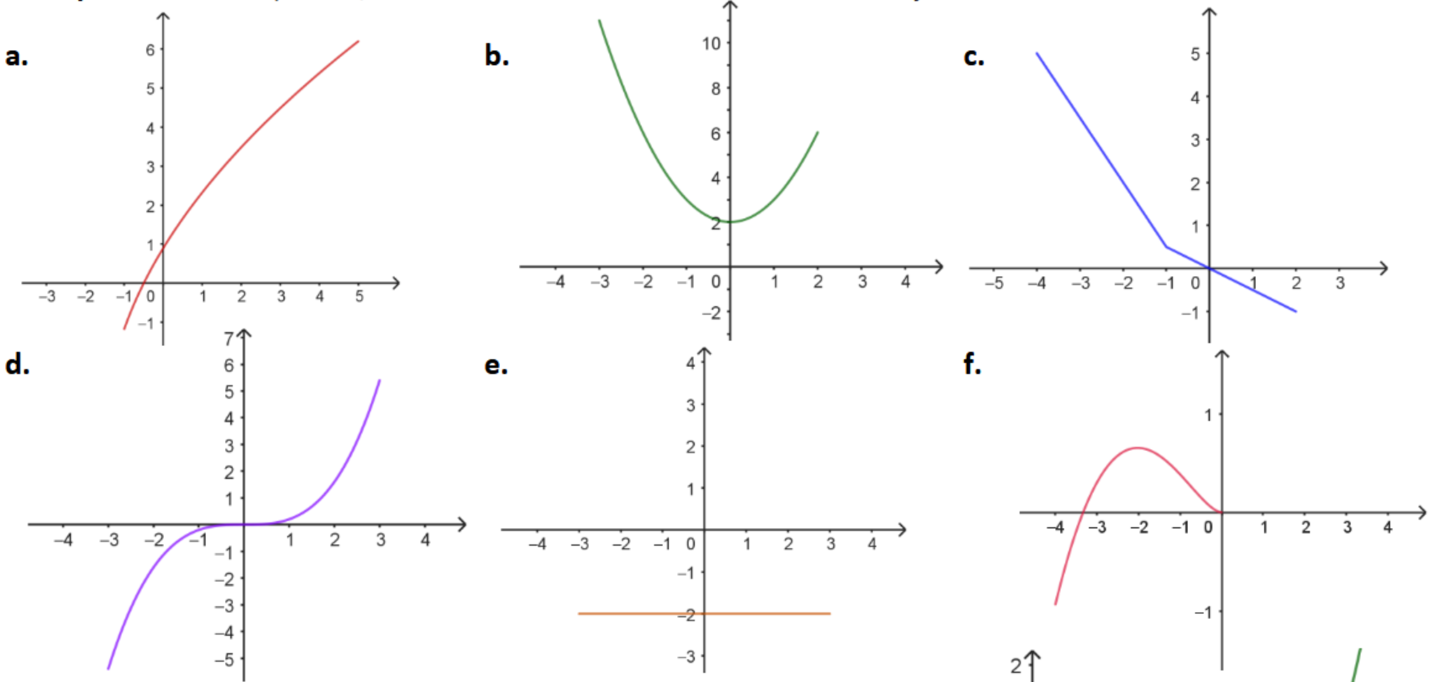
• strictement décroissante si pour tous $a, b \in I$:

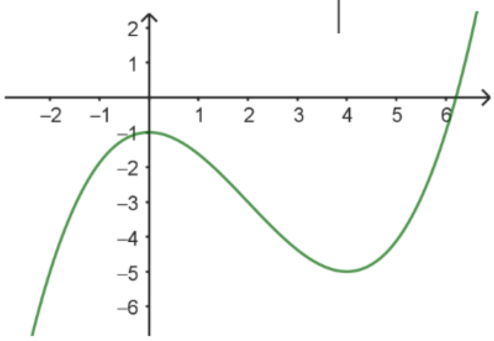
$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

• constante, si pour tous $a, b \in I$: $f(a) = f(b)$

Si f est soit croissante, soit décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Exemple 1 Dans chaque cas, donner le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle I





Exemple 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et représentée ci-contre.

a. Donner son sens de variation par lecture graphique.

b. Comparer alors $f(1)$ et $f(3)$ en justifiant.

c. Même question avec $f(-2)$ et $f(-1)$.

Exemple 3 Déterminer à l'aide de la définition, le sens de variation de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 2$.

Exemple 1

a. La fonction f semble **croissante sur** $[\mathbf{-1}; \mathbf{5}]$.

b. f semble **décroissante sur** $[\mathbf{-3}; \mathbf{0}]$, puis **croissante sur** $[\mathbf{0}; \mathbf{2}]$.

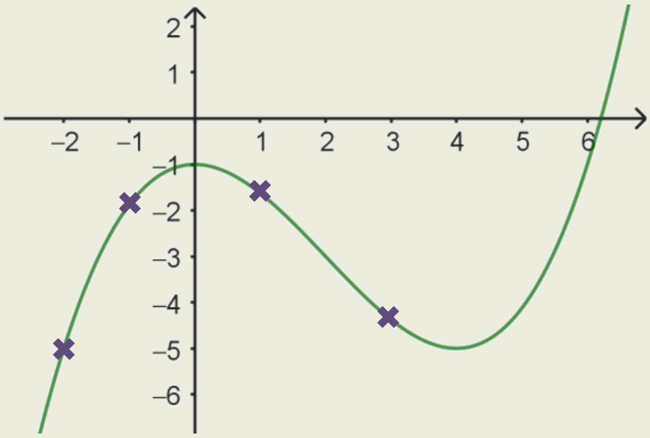
c. f semble **décroissante sur** $[\mathbf{-4}; \mathbf{2}]$. *On ne tient pas compte de la « vitesse » de décroissance.*

d. f semble **croissante sur** $[\mathbf{-3}; \mathbf{3}]$.

e. f semble **constante sur** $[\mathbf{-3}; \mathbf{3}]$.

f. f semble **croissante sur** $[\mathbf{-4}; \mathbf{-2}]$, puis **décroissante sur** $[\mathbf{-2}; \mathbf{0}]$.

Exemple 2



a. f semble **croissante sur** $]-\infty; \mathbf{0}]$,
puis **décroissante sur** $[\mathbf{0}; \mathbf{4}]$
et enfin **croissante sur** $[\mathbf{4}; +\infty[$.

b. Comme f est **décroissante sur** $[\mathbf{1}; \mathbf{3}]$,
alors $\boldsymbol{f(1) > f(3)}$.
On peut essayer de placer $f(1)$ et $f(3)$ sur le graphique pour s'en assurer, comme ci-contre.

c. Comme f est **croissante sur** $[\mathbf{-2}; \mathbf{-1}]$,
alors $\boldsymbol{f(-2) < f(-1)}$.
De la même manière, on place $f(-2)$ et $f(-1)$ sur le graphique.

Exemple 3

Soient a, b deux nombres réels.

$a < b$

$\Leftrightarrow -3a > -3b$ *On a multiplié par -3, ce qui change le sens de l'inégalité.*

$\Leftrightarrow -3a + 2 > -3b + 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{f(a) > f(b)}$.

On a démontré que f est **décroissante sur** $\mathbb{R}$.

1b. Tableau de variations

Un tableau de variations est composé de deux lignes :

• la 1ère indique les bornes de I et les valeurs où f change de variations,

• la 2nde indique par des flèches si f est croissante ou décroissante,
et les images des nombres de la 1ère ligne.

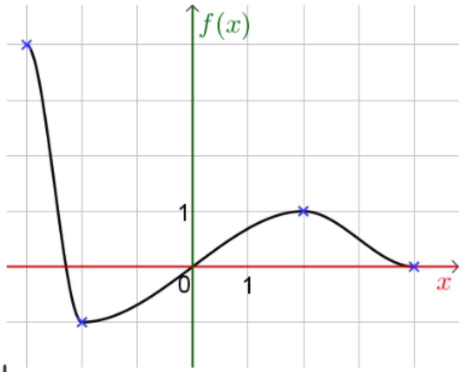
Pour tracer le tableau de variations de la fonction f ci-contre :

• dans la **première ligne**, on indique l'ensemble de définition, ici $[-3;4]$.

• ensuite, on suit le sens de variation de f sur $[-3;4]$.

À chaque changement de sens de variation (indiqué ci-contre par un petit point bleu), on trace une flèche.

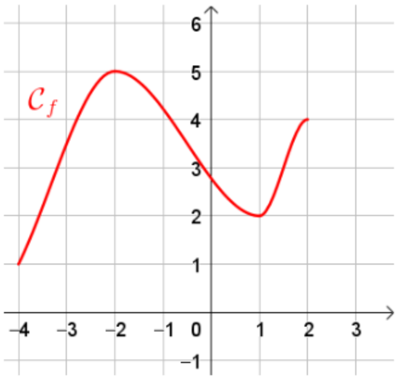
On indique les **antécédents x** dans la **première ligne**,
et les **images $f(x)$** dans la **deuxième ligne**,
On **aligne bien les antécédents avec les images** correspondantes en les plaçant au bout des flèches.

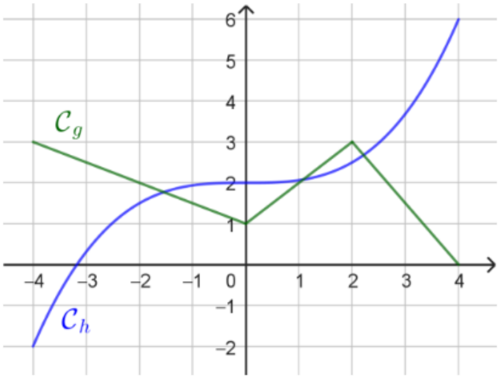


Le résultat est le suivant :

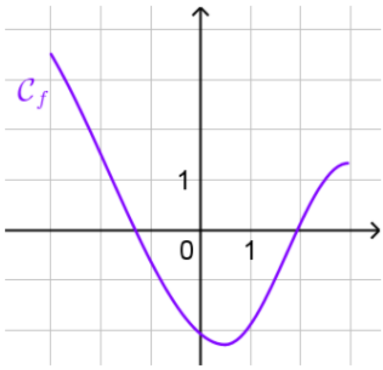
x	-3		-2		2		4
$f(x)$	4	↘	-1	↗	1	↘	0

Exemple 1 Dresser les tableaux de variations des fonctions f ; g et h sur leur ensemble de définition.





Exemple 2 Dresser le tableau de variations de la fonction f. On pourra indiquer des valeurs approchées.



Exemple 1

x	-4		-2		1		2
f	1	↗	5	↘	2	↗	4

x	-4		0		2		4
g	3	↘	1	↗	3	↘	0

x	-4		4
h	-2	↗	6

Exemple 2

x	-3		$0,5$		3
f	$3,5$	↘	$-2,2$	↗	$1,3$

1c. Utiliser un tableau

Exemple 1

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f.

a. Quel est son ensemble de définition ?

b. En justifiant avec le sens de variation,

compléter $f(0) \dots f(2)$ et $f(-2) \dots f(-1{,}5)$.

c. Peut-on comparer $f(-1{,}5)$ et $f(1)$?

x	-2		-1		3
f	5	↘	-2	↗	4

Exemple 2

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f.

De plus, on sait que $f(0) = 1$ et $f(0{,}5) = 4$.

Résoudre les équation et inéquations suivantes :

a. $f(x) = 4$ **b.** $f(x) > 4$ **c.** $f(x) \leq 1$ **d.** $f(x) > 1$

x	-4		-1		1		3
f	1	↘	-1	↗	5	↘	4

Exemple 1

a. f est définie sur $[\mathbf{-2; 3}]$

b. D'après le tableau, f est **croissante sur** $[\mathbf{0; 2}]$. Ainsi $\boldsymbol{f(0) < f(2)}$.

De plus, f est **décroissante sur** $[\mathbf{-2; -1,5}]$. Ainsi $\boldsymbol{f(-2) > f(-1,5)}$.

c. On ne peut pas comparer $\boldsymbol{f(-1,5)}$ et $\boldsymbol{f(1)}$ car f n'est pas monotone sur $[-1{,}5; 1]$: son sens de variation change.

Autrement dit, $f(-1{,}5)$ et $f(1)$ ne sont pas sur la même flèche.

Exemple 2

Pour s'aider, on peut réécrire les deux images connues directement sur le tableau de variations, comme ci-contre.

x	-4		-1	0	$0{,}5$	1		3
f	1	↘	-1	1	4	5	↘	4

a. $f(x) = 4$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0,5; 3}\}$

b. $f(x) > 4$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S} =]\mathbf{0,5; 3}[$

c. $f(x) \leq 1$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S} = [\mathbf{-4; 0}]$

d. $f(x) > 1$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S} =]\mathbf{0; 3}]$

1d. Tableau de signes

Un tableau de signes d'une fonction f est composé de deux lignes :

• la 1$^{\text{ère}}$ indique les bornes de I et les valeurs où f change de signe,

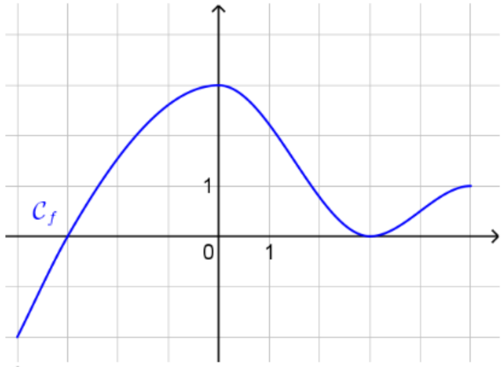
• la 2$^{\text{nde}}$ indique si $f(x)$ prend des valeurs positives ou négatives.

Pour tracer le tableau de signes de la fonction f ci-contre :

• dans la première ligne, on indique l'ensemble de définition,

• ensuite, on regarde sur quels intervalles la courbe de f est **au-dessus** de l'axe des abscisses (images **positives**) ou **en-dessous** de l'axe des abscisses (images **négatives**).

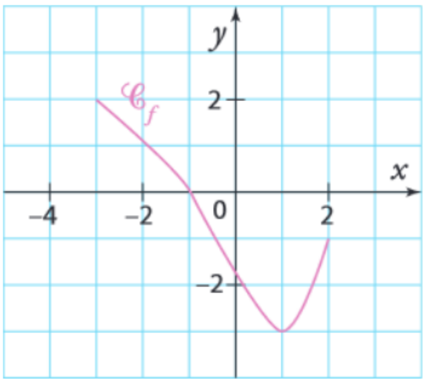
Quand la courbe **passe par l'axe des abscisses**, c'est que l'image est **nulle** : on l'indique par un **0** qu'on aligne bien avec l'antécédent correspondant.

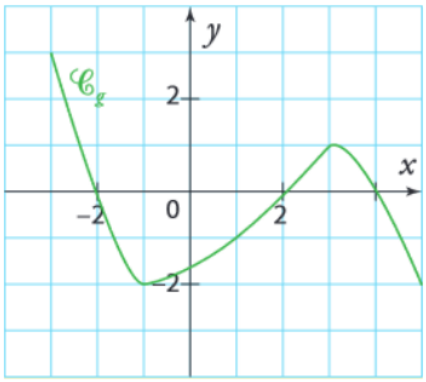


Le résultat est le suivant :

x	-4		-3		3		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Exemple Pour chaque fonction représentée ci-contre, dresser son tableau de signes puis son tableau de variations.





x	-3		-1		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	-3		-2		2		5
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		1		2
f	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

x	-3		-1		3		5
g	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2

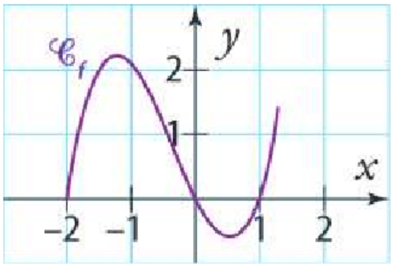
2. Extremums

2a. Définition

• le minimum m de f sur I est la plus petite image possible par f d'un nombre appartenant à I. Pour tout $x \in I$, on a $m \leq f(x)$.
• le maximum M est la plus grande image possible.
Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq M$.

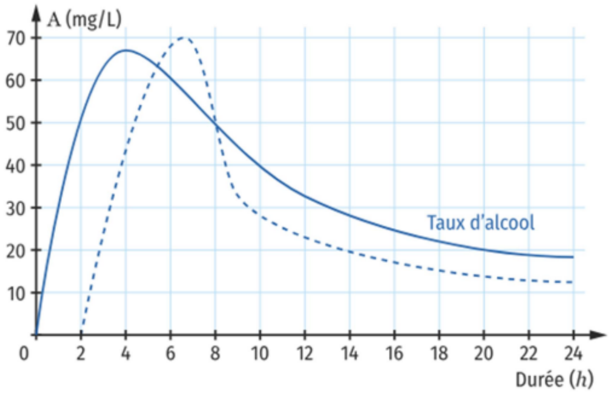
x	-1		3		5		7
g	4	↘	-5	↗	4	↘	3

Exemple 1 Soit la fonction g dont on a tracé le tableau de variations.
a. Quel est le minimum de g sur $[-1; 7]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?
b. Même question pour le maximum de g sur $[-1; 7]$.
c. Donner un encadrement de $g(x)$ pour $x \in [-1; 7]$.
d. Donner un encadrement de $g(x)$ pour $x \in [5; 7]$.



Exemple 2 On considère la fonction f définie sur $[-2; 1{,}3]$ ci-contre.
a. Quels sont ses extremums, et pour quelles valeurs de x sont-ils atteints ?
b. Donner un encadrement de $f(x)$ sur l'intervalle $[0; 1{,}3]$.

Exemple 3 Mickaël boit une boisson alcoolisée.
La fonction A représentée en trait plein ci-dessous, modélise l'évolution du taux d'alcool dans le sang de Mickaël, en fonction de la durée h en heures après absorption.
a. Dresser le tableau de variation de la fonction A sur $[0; 24]$.
b. À quelle durée le taux d'alcool est-il maximal, et quel est ce taux maximal ?
c. Mickaël a la migraine dès que $A(h)$ dépasse 40 mg/L.
Résoudre l'inéquation correspondante.
d. Pour calmer sa migraine, Mickaël prend un médicament dont le taux, $M(h)$, en mg/L, est représenté en pointillés. Ce dernier n'agit que si $M(h) > A(h)$. Quelle est alors la durée de la migraine ?



Exemple 1
a. Le minimum de g sur $[-1; 7]$ est $\mathbf{-5}$. Il est atteint pour $\boldsymbol{x = 3}$.
b. Le maximum de g sur $[-1; 7]$ est $\mathbf{4}$. Il est atteint pour $\boldsymbol{x = -1}$ et pour $\boldsymbol{x = 5}$.
c. Pour $x \in [-1; 7]$, on a $\boldsymbol{-5 \leq g(x) \leq 4}$. *L'encadrement est une autre façon de présenter le minimum et le maximum de g sur cet intervalle.*
d. Pour $x \in [5; 7]$, on a $\boldsymbol{3 \leq g(x) \leq 4}$.

Exemple 2
a. • Le **maximum** de f est **environ 2,2**. Il est atteint pour $\boldsymbol{x \approx -1,2}$.
• Le **minimum** de f est **environ** $\mathbf{-0,5}$. Il est atteint pour $\boldsymbol{x \approx 0,5}$.
b. Pour $x \in [0; 1{,}3]$, on a $\boldsymbol{-0,5 \leq f(x) \leq 1,5}$.

Exemple 3

a.

h	0		4		24
A	0	↗	67	↘	19

b. Le taux est maximal après **4 h**. Ce taux d'alcool est de **67 mg/L environ**.

c. L'équation $\boldsymbol{A(h) > 40}$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [0,7;10]}$.

Cela signifie que Mickaël a la migraine entre 0,7 h et 10 h après l'absorption.

d. $M(h) > A(h)$ pour $\boldsymbol{h} \in [\mathbf{5};\mathbf{8}]$.

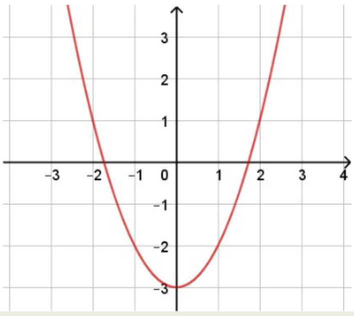
Cela signifie que Mickaël aura **la migraine sur l'intervalle** $[\mathbf{0,7};\mathbf{5}] \cup [\mathbf{8};\mathbf{10}]$, soit une durée de **6,3 heures**.

2b. Intervalle ouvert

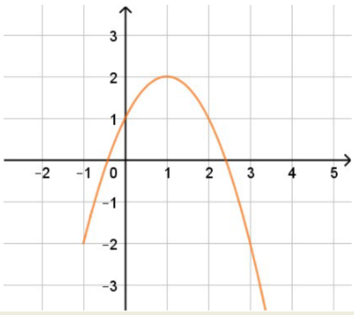
Une fonction peut ne pas admettre d'extremums si elle est définie sur un intervalle ouvert.

Pour chacune des fonctions, dresser son tableau de variations et dire si elle admet des minimums et maximums.

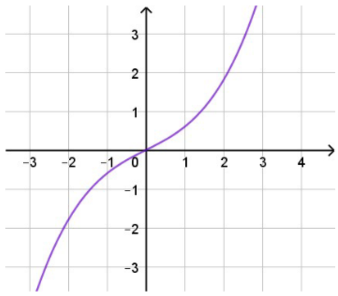
f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^2 - 3$



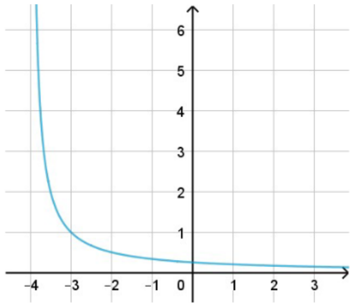
g définie sur $[-1; +\infty[$
par $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

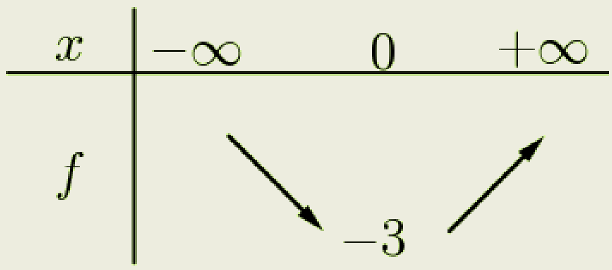


h définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}5x$

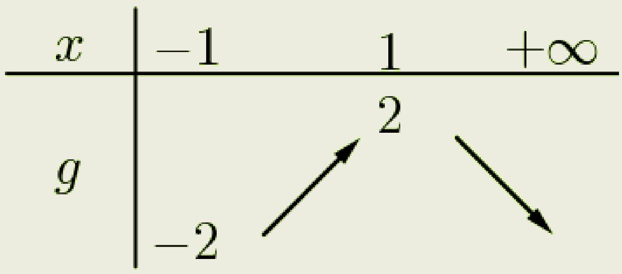


j définie sur $]-4\,; +\infty[$
par $j(x) = \dfrac{1}{x+4}$

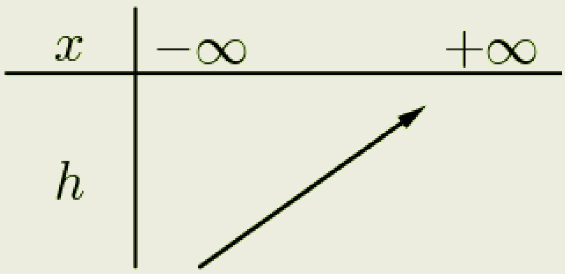




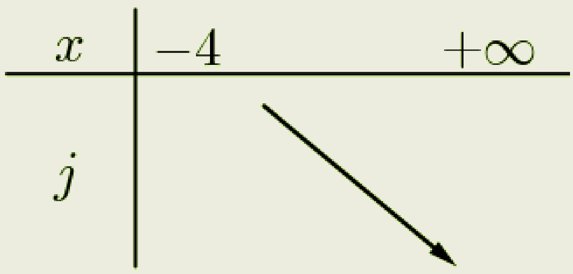
• f admet un **mininum** pour $\boldsymbol{x = 0}$.
La valeur de ce minimum est $\boldsymbol{-3}$.
• f n'admet **pas de maximum**.



• g n'admet **pas de minimum**.
La valeur -2 atteinte pour $x = -1$ n'est pas la plus petite image possible.
• g admet un **maximum** pour $\boldsymbol{x = 1}$.
La valeur de ce maximum est 2.



h n'admet **ni minimum, ni maximum**.



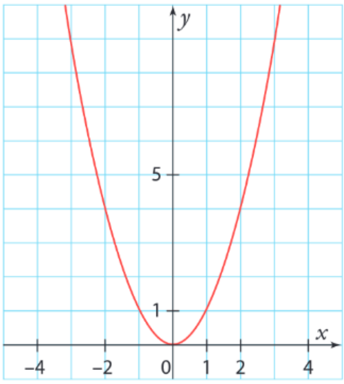
j n'admet **ni minimum, ni maximum**.

3. Fonctions de référence

Pour chacune de ces fonctions usuelles, tracer son tableau de variations et son tableau de signes.

Fonction carré

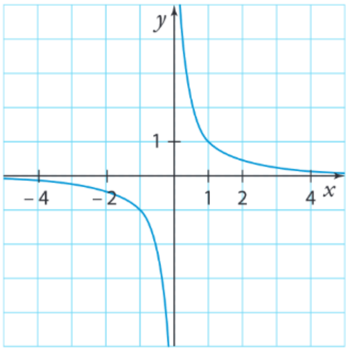
$f(x) = x^2$, définie sur $\mathbb{R}$



Fonction inverse

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

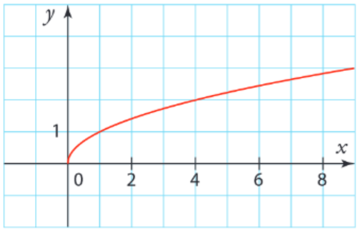
définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$



Fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$

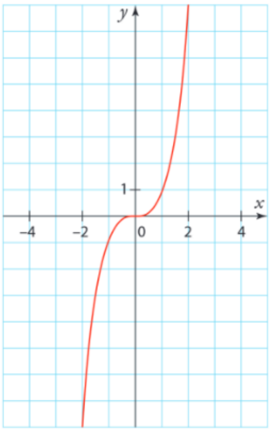
définie sur $[0; +\infty[$



Fonction cube

$f(x) = x^3$

définie sur $\mathbb{R}$



Fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

Fonction inverse

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

Fonction racine carrée

x	0		$+\infty$
f	0	↗	

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	

Fonction cube

x	$-\infty$		$+\infty$
f		↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

4. Taux d'accroissement

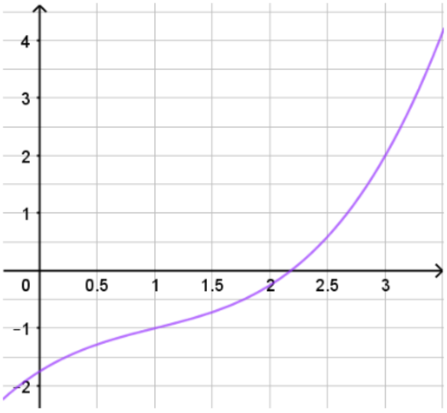
4a. Définition

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ distincts. Le taux d'accroissement de f de a à b est :

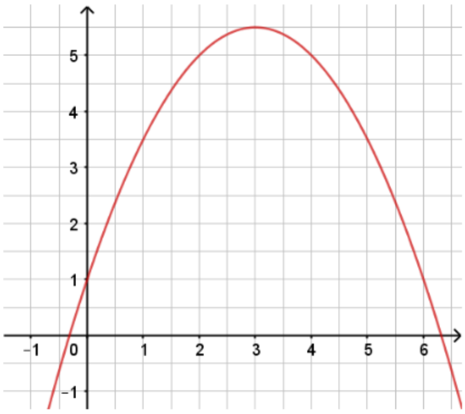
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Exemple 1 : Avec une courbe

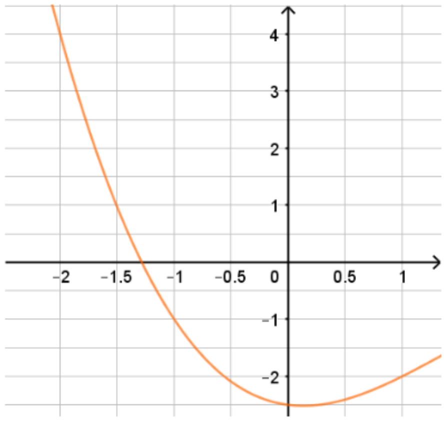
a. Calculer le taux d'accroissement de cette fonction f entre 1 et 3



b. Calculer le taux d'accroissement de cette fonction g entre 1 et 6



c. Calculer le taux d'accroissement de cette fonction h entre -2 et 1



Exemple 2 : 1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et 5.

2. Soit g, définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{2x-1}$.

a. Calculer son taux d'accroissement entre 1 et 5.

b. Calculer son taux d'accroissement entre 13 et 61.

Exemple 1

a. $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{2-(-1)}{3-1}=\dfrac{3}{2}=\mathbf{1,5}$

b. $\dfrac{g(6)-g(1)}{6-1}=\dfrac{1-3{,}5}{6-1}=\dfrac{-2{,}5}{5}=\mathbf{-0,5}$

c. $\dfrac{h(1)-h(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{-2-4}{1-(-2)}=\dfrac{-6}{3}=\mathbf{-2}$

Exemple 2

1. Soit f la fonction carré. On doit calculer :

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{25-9}{5-3}=\frac{16}{2}=\mathbf{8}$$

2a. On calcule d'abord $g(5)=\sqrt{2\times5-1}=3$ et $g(1)=\sqrt{2\times1-1}=1$.

$$\frac{g(5)-g(1)}{5-1}=\frac{3-1}{5-1}=\frac{2}{4}=\mathbf{0,5}$$

2b. On calcule d'abord $g(13)=\sqrt{2\times5-1}=5$ et $g(61)=\sqrt{2\times61-1}=11$.

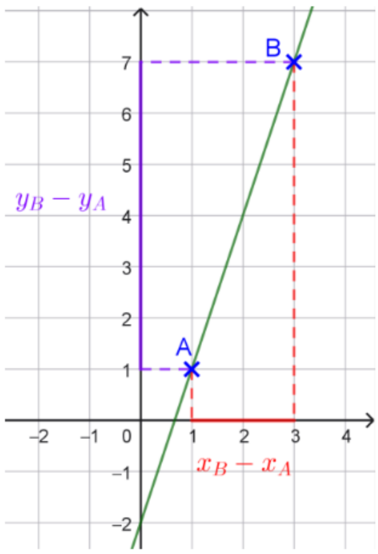
$$\frac{g(61)-g(13)}{61-13}=\frac{11-5}{61-13}=\frac{6}{48}=\mathbf{0,125}$$

4b. Fonctions affines

Propriété : Si f est une fonction affine $f(x) = mx + p$,
alors f est croissante si m est positif et décroissante si m est négatif.

Pour une fonction affine, la formule du taux d'accroissement coïncide avec celle du coefficient directeur. Si une droite passe par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Exemple 1 Donner le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = -6x + 1{,}5 \quad ; \quad f_2(x) = 3{,}6x + 2 \quad ; \quad f_3(x) = -3 + 2x$$
$$f_4(x) = -\frac{2}{3}x - 1 \quad ; \quad f_5(x) = x \quad ; \quad f_6(x) = 9$$

Exemple 2 On considère les points $A(7; -3)$ et $B(4; 9)$, ainsi que la fonction affine f représentée par (AB).
Retrouver l'expression de f. Quel est son sens de variation ?

Exemple 1

- pour f_1 : $m = -6$ est négatif, donc f_1 est **décroissante**.
- pour f_2 : $m = 3{,}6$ est positif, donc f_2 est **croissante**.
- pour f_3 : $m = 2$ est positif donc f_3 est **croissante**.
- pour f_4 : $m = -\frac{2}{3}$ est négatif, donc f_4 est **décroissante**.
- pour f_5 : $m = 1$ est positif, donc f_5 est **croissante**.
- pour f_6 : $m = 0$ est nul, donc f_5 est **constante**.

Exemple 2

On calcule le coefficient directeur :

$$m = \frac{9 - (-3)}{4 - 7} = \frac{12}{-3} = \mathbf{-4}$$

On peut déjà en déduire que f est **décroissante**.
Cherchons maintenant l'ordonnée à l'origine p. On sait que $f(7) = -3$, ainsi
$-4 \times 7 + p = -3 \Leftrightarrow -28 + p = -3 \Leftrightarrow p = -3 + 28 = \mathbf{25}$
f est donc définie par $\boldsymbol{f(x) = -4x + 25}$.