

# Chapitre 10 – Systèmes d'équations & droites

## 1. Systèmes d'équations

### 1a. Définition

Un système d'équations est la donnée de **deux équations** avec **deux inconnues**. Un couple  $(x; y)$  solution **doit convenir aux deux équations en même temps**.

#### Exemple 1

- a. Vérifier si le couple  $(9; 2)$  est solution du système  $\begin{cases} x + 5y = 19 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$
- b. Vérifier si le couple  $(4; 3)$  est solution du même système  $\begin{cases} x + 5y = 19 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$
- c. Vérifier si le couple  $(-1; 2)$  est solution du système  $\begin{cases} y - 3x = 5 \\ -x - 5y = -9 \end{cases}$

#### Exemple 2

Sur le marché de Noël, trois amis achètent les mêmes bougies parfumées et des plats décoratifs identiques.

- Rémi achète trois bougies parfumées et cinq plats décoratifs. Il paie 66 €.
  - Yvan achète huit bougies parfumées et trois plats décoratifs pour 83 €.
- a. Modéliser ce problème par un système d'équation permettant de trouver le prix des bougies et des plats.
- b. Vérifier qu'une bougie coûte 7€, et qu'un plat coûte 9€.
- c. Kamel achète deux bougies parfumées et un plat décoratif. Combien va-t-il payer ?

### Exemple 1

*Dans les deux équations, il faut remplacer  $x$  par le premier nombre du couple et  $y$  par le deuxième nombre, et vérifier si l'égalité est vérifiée.*

**a.** Dans la première équation :  $9 + 5 \times 2 = 19$

Dans la deuxième :  $-2 \times 9 + 2 = -16 \neq -5$

Le couple  $(9; 2)$  n'est **pas solution du système**.

**b.** Dans la première équation :  $4 + 5 \times 3 = 19$

Dans la deuxième :  $-2 \times 4 + 3 = -5$

Le couple  $(4; 3)$  **est solution du système**.

*c. On fait attention :  $x$  est le premier nombre,  $y$  le deuxième nombre.*

Dans la première équation :  $2 + 3 \times (-1) = 5$

Dans la deuxième :  $-(-1) - 5 \times 2 = -9$

Le couple  $(-1; 2)$  **est solution du système**.

## Exemple 2

a. Soit  $x$  le prix d'une bougie, et  $y$  le prix d'un plat décoratifs. On peut écrire :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 66 \\ 8x + 3y = 83 \end{cases}$$

b. Vérifions si le couple  $(7; 9)$  est solution du système.

$$3 \times 7 + 5 \times 9 = 21 + 45 = \mathbf{66} \text{ et } 8 \times 7 + 3 \times 9 = 56 + 27 = \mathbf{83}.$$

Ainsi, une bougie coûte bien 7€, et un plat décoratif 9€.

c.  $2 \times 7 + 9 = 14 + 9 = 23$ . Kamel payera **23€**.

# 1b. Méthode par substitution

Pour résoudre un système, on peut :

- **isoler  $x$  (ou  $y$ )** dans l'équation où cette opération est la plus « facile »
- puis de **substituer le  $x$  (ou le  $y$ ) de l'autre équation** par l'expression trouvée en isolant  $x$  (ou  $y$ ).

**Exemple 1** Résoudre les systèmes d'équation suivants, par substitution.

Les deux lignes peuvent être nommées  $(L_1)$  et  $(L_2)$ .

a. 
$$\begin{cases} 4x + y = 29 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 4x + 2y = -27 \\ -x + 6y = 23 \end{cases}$$

**Exemple 2** Une famille de 2 adultes et 3 enfants va au cinéma. Elle paye 26€.

Un grand-père et ses 6 petits-enfants vont au cinéma. Ils payent 31€.

Quel est le prix d'une place adulte, et quel est le prix d'une place enfant?

**Exemple 3** Lors d'un match de rugby, un stade a réalisé 58 000€ de recettes en vendant des places.

Une place en catégorie A coûte 30€, une place en catégorie B coûte 20€.

En tout, 2 550 places ont été vendues. Combien y a-t-il de places catégorie A, et de places catégorie B ?

## Exemple 1

a. On nomme les lignes : 
$$\begin{cases} 4x + y = 29 & (L_1) \\ 2x - 3y = -3 & (L_2) \end{cases}$$

*Dans  $(L_1)$ ,  $y$  n'est pas multiplié par un nombre, on peut facilement l'isoler.*

$$(L_1) \Rightarrow 4x + y = 29$$

$$\Leftrightarrow y = 29 - 4x$$

*On a isolé  $y$ . On va maintenant travailler dans  $(L_2)$  en remplaçant  $y$ .*

$$(L_2) \Rightarrow 2x - 3y = -3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3(29 - 4x) = -3$$

*Ainsi, il ne reste plus qu'une inconnue  $x$ . On peut résoudre l'équation.*

$$\Leftrightarrow 2x - 87 + 12x = -3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 12x = -3 + 87$$

$$\Leftrightarrow 14x = 84$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{84}{14} = 6$$

*On a trouvé  $x$  ! Pour trouver  $y$ , on réutilise la ligne  $(L_1)$  où il était isolé.*

$$(L_1) \Rightarrow y = 29 - 4x = 29 - 4 \times 6 = 5$$

*Le couple solution est donc  $(6; 5)$ . Attention, ce n'est pas un « ensemble solution ».*

*Il n'y a qu'une seule solution : c'est ce « couple » de nombres.*

b. On nomme les lignes : 
$$\begin{cases} 4x + 2y = -27 & (L_1) \\ -x + 6y = 23 & (L_2) \end{cases}$$

*Ici, c'est dans  $(L_2)$  que l'on peut facilement isoler  $x$ .*

$$(L_2) \Rightarrow -x + 6y = 23$$

$$\Leftrightarrow -x = 23 - 6y \quad \text{Attention, ici } x \text{ n'est pas encore isolé : on a trouvé } -x.$$

$$\Leftrightarrow x = -23 + 6y$$

*On travaille maintenant dans  $(L_1)$  en remplaçant  $x$ .*

$$\begin{aligned}
(L_2) &\Rightarrow 4x + 2y = -27 \\
&\Leftrightarrow 4(-23 + 6y) + 2y = -27 \\
&\Leftrightarrow -92 + 24y + 2y = -27 \\
&\Leftrightarrow 26y = -27 + 92 \\
&\Leftrightarrow 26y = 65 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{65}{26} = \mathbf{2,5}
\end{aligned}$$

*On retourne maintenant à la ligne (L<sub>2</sub>) où x était isolé.*

$$(L_2) \Rightarrow x = -23 + 6y = -23 + 6 \times 2,5 = -23 + 15 = \mathbf{-8}$$

Le couple solution est donc  $(\mathbf{-8; 2,5})$ . *Attention à l'ordre entre x et y.*

**Exemple 2** Soit x le prix d'une place adulte, et y le prix d'une place enfant. On a :

$$\begin{cases}
2x + 3y = 26 & (L_1) \\
x + 6y = 31 & (L_2)
\end{cases}$$

*On isole x dans (L<sub>2</sub>).*  $(L_2) \Rightarrow x + 6y = 31 \Leftrightarrow \mathbf{x = 31 - 6y}$

*On substitue dans (L<sub>1</sub>).*

$$\begin{aligned}
(L_1) &\Rightarrow 2x + 3y = 26 \\
&\Leftrightarrow 2(31 - 6y) + 3y = 26 \\
&\Leftrightarrow 62 - 12y + 3y = 26 \\
&\Leftrightarrow -9y = 26 - 62 \\
&\Leftrightarrow -9y = -36 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-36}{-9} = \mathbf{4}
\end{aligned}$$

*On revient à (L<sub>2</sub>).*  $(L_2) \Rightarrow x = 31 - 6y = 31 - 6 \times 4 = \mathbf{7}$ .

Le couple solution est  $(\mathbf{7 ; 4})$ . Une **place adulte coûte 7€**, une **place enfant 4€**.

**Exemple 3** Soit x le prix d'une place catégorie A, et y le prix d'une place catégorie B. On sait que la somme de ces nombres de places est 2 550. Ainsi :

$$\begin{cases}
30x + 20y = 58\,000 & (L_1) \\
x + y = 2\,550 & (L_2)
\end{cases}$$

*Dans (L<sub>2</sub>), x ou y sont tout aussi faciles à isoler.*

*On isole x dans (L<sub>2</sub>).*  $(L_2) \Rightarrow x + y = 2\,550 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2\,550 - y}$

*On substitue dans (L<sub>1</sub>).*

$$\begin{aligned}
(L_1) &\Rightarrow 30x + 20y = 58\,000 \\
&\Leftrightarrow 30(2\,550 - y) + 20y = 58\,000 \\
&\Leftrightarrow 76\,500 - 30y + 20y = 58\,000 \\
&\Leftrightarrow 76\,500 - 10y = 58\,000 \\
&\Leftrightarrow -10y = 58\,000 - 76\,500 \\
&\Leftrightarrow -10y = -18\,500 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-18\,500}{-10} = \mathbf{1\,850}
\end{aligned}$$

*On revient à (L<sub>2</sub>).*  $(L_2) \Rightarrow x = 2\,550 - y = 2\,550 - 1\,850 = \mathbf{700}$ .

**700 places de catégorie A**, et **1 850 places de catégorie B** ont été vendues.

# 1c. Méthode par combinaison

Pour résoudre un système, on peut aussi :

- **multiplier une ligne** par un nombre de notre choix
- **additionner ou soustraire des lignes**, dans le but de **supprimer une inconnue**.

**Exemple 1** Résoudre le système d'équations suivant, par combinaison : 
$$\begin{cases} 7x + 3y = 17 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

**Exemple 2** Le kcal (kilocalorie) est la mesure de l'énergie d'un aliment.

- La valeur énergétique de 300 g de bananes et de 250 g de clémentines est de 320 kcal.
  - La valeur énergétique de 150 g de bananes et de 400 g de clémentines est de 215 kcal.
- a. Déterminer la valeur énergétique d'un gramme de banane, et d'un gramme de clémentines.  
b. En déduire la valeur énergétique de 80 g de bananes et de 140 g de clémentines.

**Exemple 1** 
$$\begin{cases} 7x + 3y = 17 & (L_1) \\ 4x - 5y = 3 & (L_2) \end{cases}$$

*Le but de la méthode par combinaison est de multiplier  $(L_1)$  et  $(L_2)$  par des nombres bien choisis, et d'additionner les deux lignes obtenues, dans le but de supprimer une inconnue.*

*Par exemple, dans  $(L_1)$ ,  $y$  est multiplié par 3, et dans  $(L_2)$ ,  $y$  est multiplié par  $-5$ . On choisit donc de multiplier  $(L_1)$  par 5 et de multiplier  $(L_2)$  par 3, ce qui nous permettra de trouver  $+15y$  et  $-15y$  qui sont opposés.*

$$5 \times (L_1) : 35x + 15y = 85$$

$$3 \times (L_2) : 12x - 15y = 9$$

*On additionne ensuite les deux lignes pour se débarrasser des  $y$ .*

$$5 \times (L_1) + 3 \times (L_2) : 35x + 12x + 15y - 15y = 85 + 9$$

$$\Leftrightarrow 47x = 94$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{94}{47}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

*On a trouvé  $x$ . On choisit ensuite une des deux lignes  $(L_1)$  ou  $(L_2)$  pour remplacer  $x$  par 2 et ainsi trouver  $y$ .*

$$(L_1) : 7 \times 2 + 3y = 17 \Leftrightarrow 14 + 3y = 17 \Leftrightarrow 3y = 17 - 14 \Leftrightarrow 3y = 3 \Leftrightarrow y = 1.$$

*Le couple solution est  $(2; 1)$ .*

## Exemple 2

a. Soit  $x$  la valeur énergétique d'un gramme de banane, et  $y$  la valeur énergétique d'un gramme de clémentines. Le problème se met en équation :

$$\begin{cases} 300x + 250y = 320 & (L_1) \\ 150x + 400y = 215 & (L_2) \end{cases}$$

Dans  $(L_1)$ ,  $x$  est multiplié par 300, et dans  $(L_2)$ ,  $x$  est multiplié par 150.

Si on multiplie  $(L_2)$  par  $-2$  et qu'on ajoute cette nouvelle ligne à  $(L_1)$ , on pourra supprimer les  $x$  !

$$(L_1) : 300x + 250y = 320$$

$$-2 \times (L_2) : -300x - 800y = -430$$

On ajoute donc ces deux lignes :

$$(L_1) - 2 \times (L_2) : 300x - 300x + 250y - 800y = 320 - 430$$

$$\Leftrightarrow -550y = -110$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-110}{-550}$$

$$\Leftrightarrow y = 0,2$$

On a trouvé  $y$ . On choisit ensuite une des deux lignes  $(L_1)$  ou  $(L_2)$  pour remplacer  $y$  par  $0,2$  et ainsi trouver  $x$ .

$$(L_1) : 300x + 250 \times 0,2 = 320$$

$$\Leftrightarrow 300x + 50 = 320$$

$$\Leftrightarrow 300x = 320 - 50$$

$$\Leftrightarrow 300x = 270$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{270}{300} = 0,9$$

Le couple solution est  $(0,9 ; 0,2)$ . Ainsi, **un gramme de banane apporte 0,9 kcal**, et **un gramme de clémentine apporte 0,2 kcal**.

b. On calcule  $80 \times 0,9 + 140 \times 0,2 = 72 + 28 = 100$  kcal.

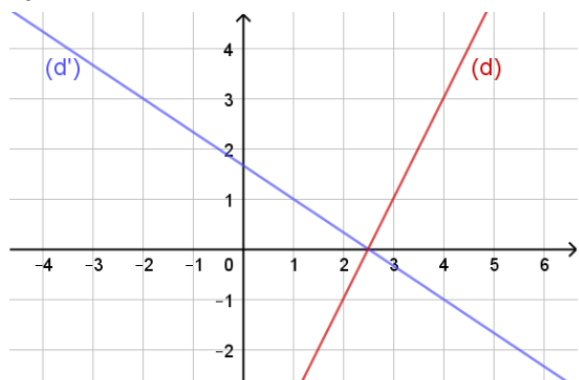
## 2. Vecteur directeur

Soit une droite  $(d)$  et deux points  $A$  et  $B$  de cette droite.

On appelle **vecteur directeur de la droite  $(d)$** , tout vecteur **colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$** .

Une droite peut donc être définie par un point et un vecteur directeur.

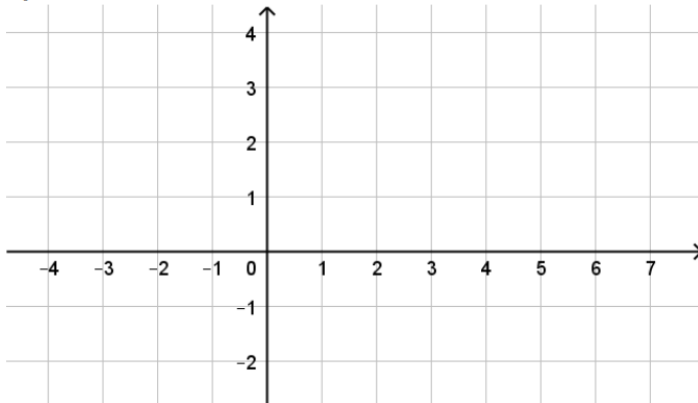
### Exemple 1



Donner quelques vecteurs directeurs possibles

- de la droite  $(d)$  :
- de la droite  $(d')$  :

### Exemple 2



a. Tracer  $(d)$ , passant par  $A(1; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

b. Tracer  $(d')$ , passant par  $M(-2; 3)$  et dirigée par  $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

### Exemple 1

• Sur  $(d)$ , on peut placer par exemple les points  $A(3; 1)$  et  $B(4; 3)$ , ce qui nous donne le vecteur  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

On peut ensuite donner d'autres vecteurs colinéaires à  $\overrightarrow{AB}$ , par exemple  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$  ou même  $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

• Sur  $(d')$ , on peut placer  $C(-2; 3)$  et  $D(1; 1)$ , pour obtenir  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

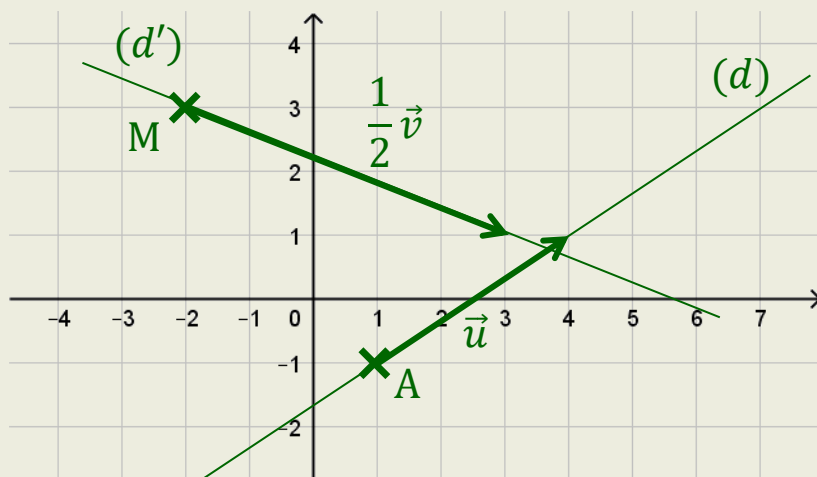
On peut ensuite trouver des vecteurs colinéaires :  $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 30 \\ -20 \end{pmatrix}$ ...

### Exemple 2

a. On place le point  $A(1; -1)$ , on trace le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , et on le prolonge pour obtenir  $(d)$ .

b. Même méthode, mais le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$  est trop long...

On le remplace par le vecteur colinéaire  $\frac{1}{2}\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ .



# 3a. Équation réduite

## 3a. Ensembles de points

Un ensemble de points peut se définir à l'aide d'une équation faisant intervenir l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$ .

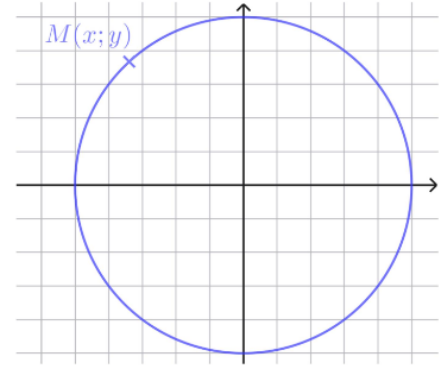
Ci-contre, dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on a représenté le cercle de centre  $O$  et de rayon 5.

L'équation de cet ensemble de points est :

$$x^2 + y^2 = 25$$

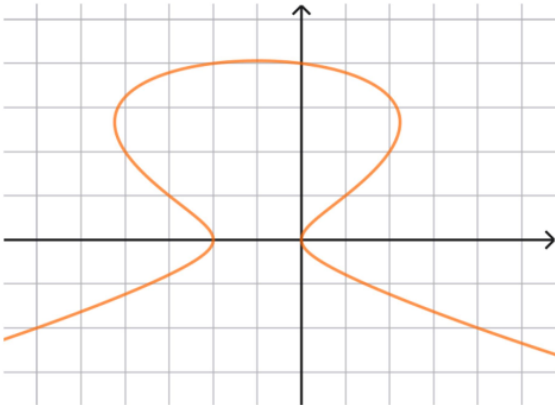
Cela signifie qu'un point  $M(x; y)$  appartient au cercle si et seulement si ses coordonnées  $x$  et  $y$  satisfont l'équation  $x^2 + y^2 = 25$ .

- Exemple**
- a. Vérifier que le point  $A(3; 4)$  appartient au cercle.
  - b. Le point  $B(-4; 2)$  appartient-il au cercle ?



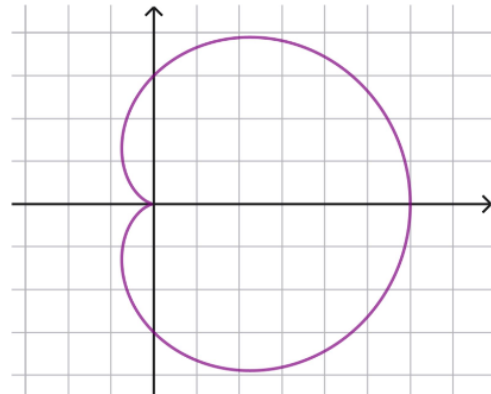
D'autres équations donnent différents ensemble de points :

$$x^2 + 2x = 4y^2 - y^3$$



$$(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2)$$

Cet ensemble est appelé un « cardioïde »



- a. Dans l'équation du cercle  $x^2 + y^2 = 25$ , on remplace  $x$  par 3 et  $y$  par 4.  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$  donc le point  $A(3; 4)$  appartient bien au cercle.
- b. On fait de même, mais  $(-4)^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \neq 25$ , donc le point  $B(-4; 2)$  n'appartient pas au cercle.

## 3b. Équation de droite

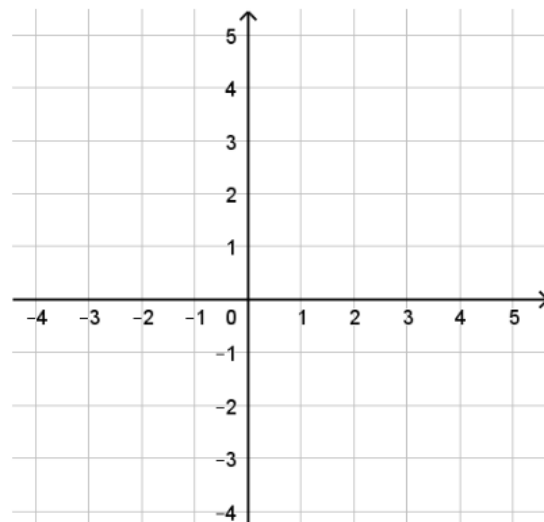
- Toute **droite verticale** admet une équation « réduite » de la forme :  
$$x = k$$
 avec  $k \in \mathbb{R}$

- Toute **droite non verticale** admet une équation « réduite » de la forme :  
$$y = mx + p$$
 avec  $m, p \in \mathbb{R}$  et  $m \neq 0$   
 $m$  est le **coefficient directeur**,  $p$  est l'**ordonnée à l'origine**.

La droite admet pour **vecteur directeur**  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  et passe par le **point**  $(0; p)$ .

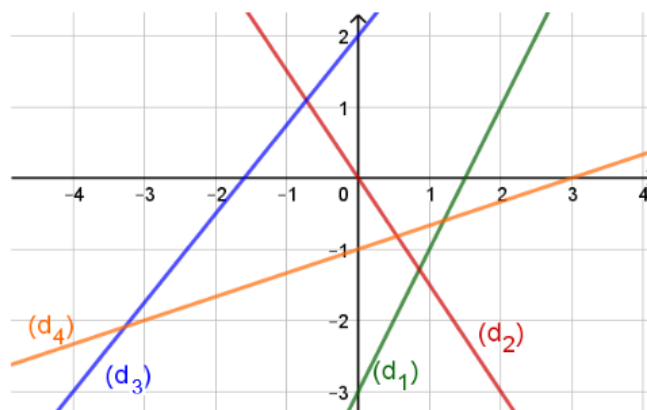
**Exemple 1** Représenter :

- la droite  $(d_1)$  d'équation réduite  $y = -2x + 3$
- la droite  $(d_2)$  d'équation réduite  $y = \frac{3}{4}x - 2$
- la droite  $(d_3)$  d'équation réduite  $x = 4$
- la droite  $(d_4)$  d'équation réduite  $y = -\frac{2}{5}x$



**Exemple 2**

Donner les équations réduites des droites ci-contre.

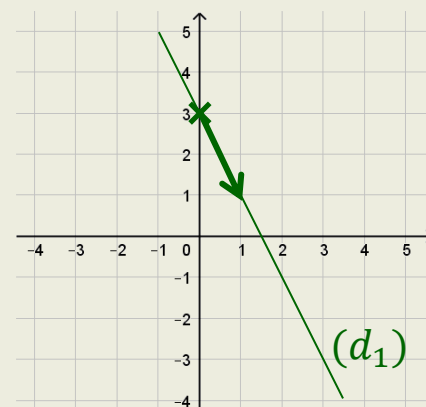


**Exemple 1**

- $(d_1) : y = -2x + 3$

D'après l'équation, la droite passe par le point de coordonnées  $(0; 3)$  et est dirigée par le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

On place ce point et on trace puis prolonge ce vecteur.



- $(d_2) : y = \frac{3}{4}x - 2$

La droite passe par le point  $(0; -2)$ .

Elle est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  qui n'est pas pratique à

tracer. On multiplie ce vecteur par 4 pour obtenir  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

comme autre vecteur colinéaire.

- $(d_3) : x = 4$

Il s'agit de la **droite verticale** passant par les points d'abscisse 4.

- $(d_4) : y = -\frac{2}{5}x$

La droite passe par le point  $(0; 0)$ , c'est-à-dire l'origine.

Elle est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  qu'on multiplie par 5

pour obtenir  $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

### Exemple 2

- $(d_1)$  passe par le point  $(0; -3)$  et est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Son équation réduite est  $y = 2x - 3$ .

- $(d_2)$  passe par le point  $(0; 0)$  et est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

On divise ce vecteur par 2 pour obtenir  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

L'équation réduite de  $(d_2)$  est  $y = -1,5x$ .

- $(d_3)$  passe par le point  $(0; 2)$  et est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

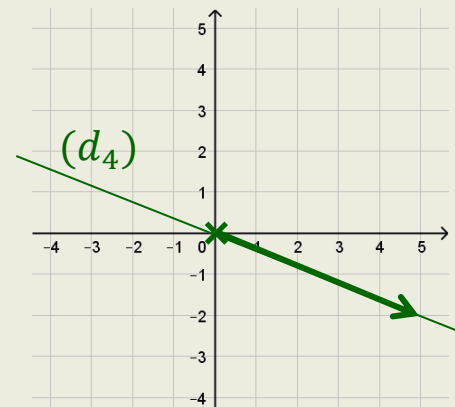
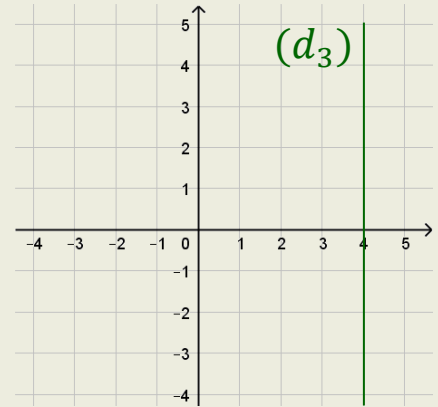
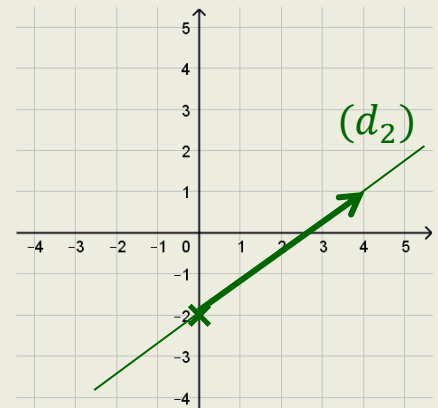
On divise ce vecteur par 4 pour obtenir  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1,25 \end{pmatrix}$

L'équation réduite de  $(d_3)$  est  $y = 1,25x + 2$ .

- $(d_4)$  passe par le point  $(0; -1)$  et est dirigée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On divise ce vecteur par 3 pour obtenir  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

L'équation réduite de  $(d_4)$  est  $y = \frac{1}{3}x - 1$ .

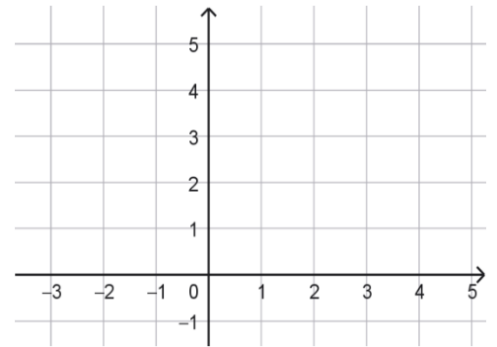


### 3c. Retrouver le coefficient directeur

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  d'abscisses différentes.

La droite passant par  $A$  et  $B$  a pour **coefficient directeur**  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

**Exemple 1** Dans le repère ci-contre, placer les points  $A(-2; 1)$  et  $B(4; 4)$ , puis déterminer par le calcul le coefficient directeur de la droite  $(AB)$ .



**Exemple 2**

a. On considère les points  $A(-1; -3)$  et  $B(2; -9)$ .

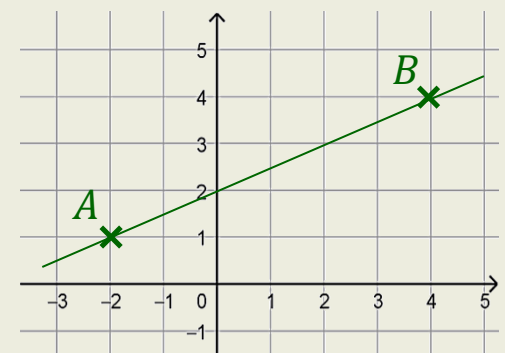
Déterminer l'équation réduite de  $(AB)$ .

b. Soient  $C(-1; 2)$  et  $D(5; 26)$ . Déterminer l'équation réduite de  $(CD)$ .

**Exemple 1**

On applique la formule pour trouver le coefficient directeur  $m$  :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5}$$



**Exemple 2 a.** Le coefficient directeur de la droite est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-9 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = \mathbf{-2}$$

*Il faut maintenant trouver l'ordonnée à l'origine  $p$ .*

L'équation réduite est de la forme  $y = -2x + p$ .

Or le point  $A(-1; -3)$  passe par la droite, donc on sait que :

$$\begin{aligned} y &= -2x + p \\ \Leftrightarrow -3 &= -2 \times (-1) + p \\ \Leftrightarrow -3 &= 2 + p \\ \Leftrightarrow -3 - 2 &= p \\ \Leftrightarrow p &= \mathbf{-5} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation réduite de  $(AB)$  est  $y = -2x - 5$ .

**b.** Le coefficient directeur de la droite est :

$$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{26 - 2}{5 - (-1)} = \frac{24}{6} = \mathbf{4}$$

L'équation réduite est de la forme  $y = 4x + p$ .

Or le point  $D(5; 26)$  passe par la droite, donc on sait que :

$$\begin{aligned} y &= 4x + p \\ \Leftrightarrow 26 &= 4 \times 5 + p \\ \Leftrightarrow 26 &= 20 + p \\ \Leftrightarrow p &= \mathbf{6} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation réduite de  $(CD)$  est  $y = 4x + 6$ .

# 4. Équation cartésienne

Toute droite admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

avec  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  n'étant pas tous les deux nuls.

Dans ce cas, la droite admet pour **vecteur directeur**  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

## Exemple 1

Pour chacune des droites ci-contre, donner un vecteur directeur à l'aide de l'équation cartésienne.

## Exemple 2

On considère la droite  $(d_1) : 3x + y - 5 = 0$ .

Les points  $A(1; 2)$ ,  $B(2; 1)$  et  $C(4; -7)$

appartiennent-ils à  $(d_1)$  ?

## Exemple 3

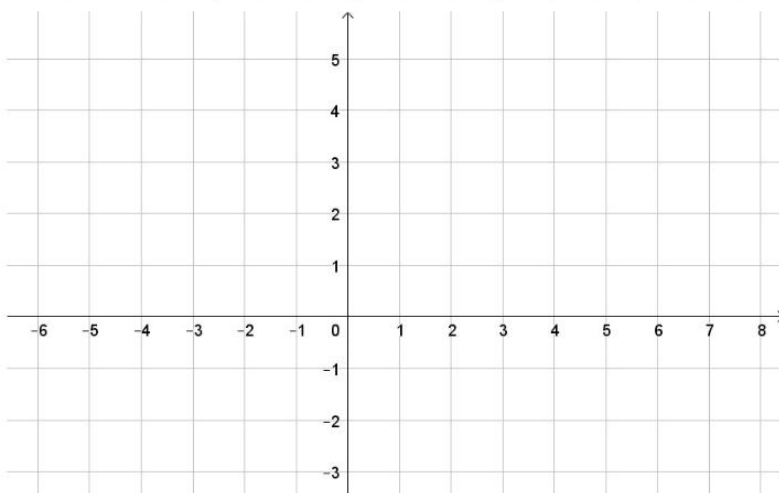
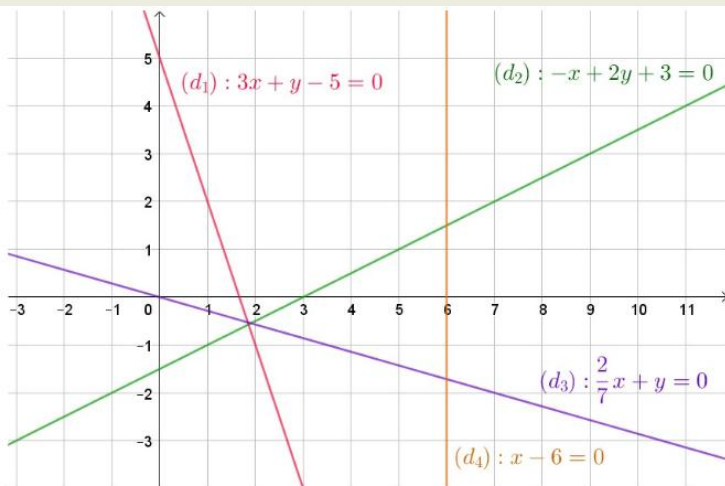
On considère la droite

$$(d) : -2x + 3y + 1 = 0$$

a. Déterminer plusieurs vecteurs directeurs de cette droite.

b. En remplaçant  $x$  ou  $y$  par un nombre de votre choix, déterminer un point appartenant à cette droite.

c. En utilisant le point obtenu et un vecteur directeur, tracer  $(d)$  dans le repère ci-contre.



## Exemple 1

• Dans l'équation cartésienne de  $(d_1)$ , on a  $a = 3$ ,  $b = 1$  et  $c = -5$ .

Donc en appliquant la formule  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ , on trouve que  $(d_1)$  est dirigée par  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

• Pour  $(d_2)$ , on a  $a = -1$ ,  $b = 2$  et  $c = 3$ . Donc  $(d_2)$  est dirigée par  $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

• Pour  $(d_3)$ , on a  $a = \frac{2}{7}$ ,  $b = 1$  et  $c = 0$ . Donc  $(d_3)$  est dirigée par  $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ .

• Pour  $(d_4)$ , on a  $a = 1$ ,  $b = 0$  et  $c = -6$ . Donc  $(d_4)$  est dirigée par  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## Exemple 2

• Dans l'équation cartésienne  $3x + y - 8 = 0$  de  $(d_1)$ , on remplace  $x$  par 1 et  $y$  par 2 dans le membre de gauche.

$$3 \times 1 + 2 - 5 = 5 - 5 = 0, \text{ donc } A(1; 2) \in (d_1).$$

• En revanche,  $3 \times 2 + 1 - 5 = 7 - 5 = 2 \neq 0$ , donc  $B(2; 1) \notin (d_1)$ .

•  $3 \times 4 + (-7) - 5 = 12 - 12 = 0$ , donc  $C(4; -7) \in (d_1)$ .

## Exemple 3

a. D'après l'équation cartésienne, on peut choisir  $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  comme vecteur directeur, mais n'importe quel vecteur colinéaire convient :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$  ou même  $\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$ .

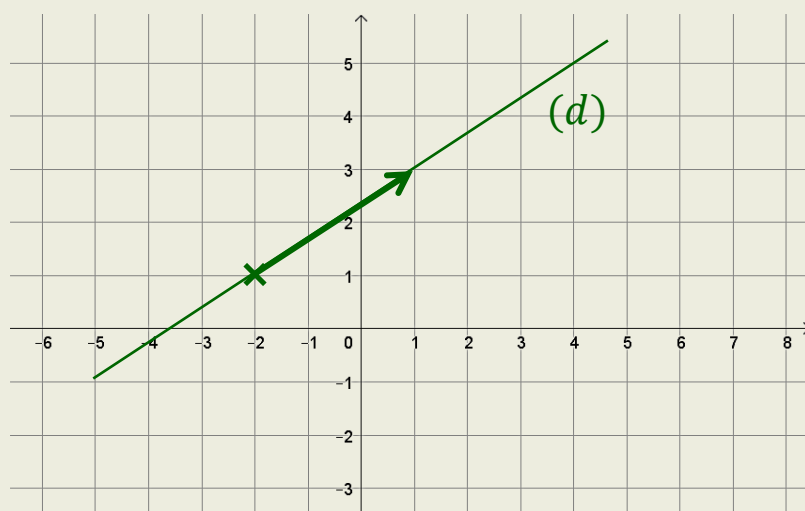
b. *La question est un peu trompeuse : oui, on peut remplacer  $x$  ou  $y$  par un nombre « de notre choix », mais en pratique il faut qu'on aboutisse à des coordonnées entières, et qui sont dans le repère proposé.*

On remplace  $y$  par 1. On a alors :

$$-2x + 3 \times 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Ainsi, le point de coordonnées  $(-2; 1)$  appartient à la droite  $(d)$ .

c. On trace donc la droite passant par  $(-2; 1)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .



# 5. Parallèles et sécantes

## 5a. Position relative de deux droites

Dans le plan, deux droites peuvent être **soit sécantes, soit parallèles, soit confondues**.

**Propriété** : soient deux droites d'équations réduites :

$$y = mx + p \quad \text{et} \quad y = m'x + p'$$

Elles sont **parallèles** si et seulement si  $m = m'$ .

Si de plus  $p = p'$ , elles sont confondues.

**Propriété** : soient deux droites d'équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0$$

Elles sont **parallèles** si et seulement si  $ab' - ba' = 0$ .

Le nombre  $ab' - ba'$  est appelé **déterminant**.

**Exemple 1** Représenter la droite  $(d)$  d'équation  $y = 2x - 1$  et la droite  $(d')$  d'équation  $y = -3x + 2$

Sont-elles sécantes ou parallèles ? Justifier.

Si elles sont sécantes, quelles semblent être les coordonnées de leur point d'intersection ?

**Exemple 2**

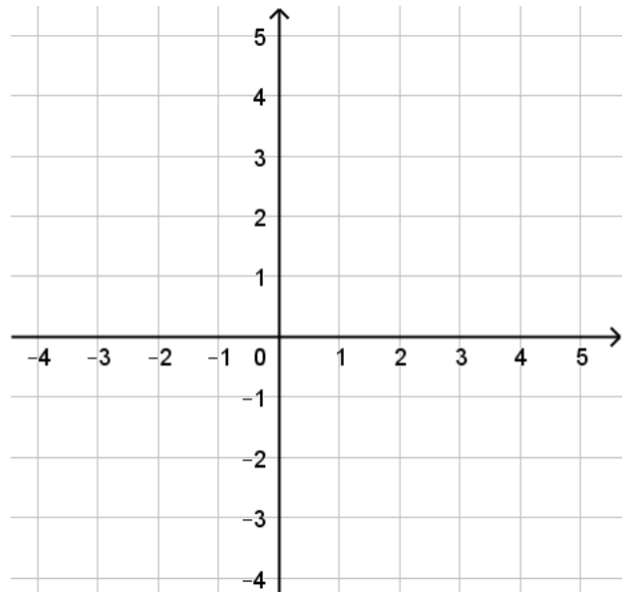
Quelle est la position relative des droites d'équations

$(d) : y = 7x + 1$  et  $(d') : y = 7x - 9$  ?

**Exemple 3**

Quelle est la position relative des droites d'équations

$(d) : 3x - 2y + 1 = 0$  et  $(d') : -6x + 4y + 7 = 0$  ?



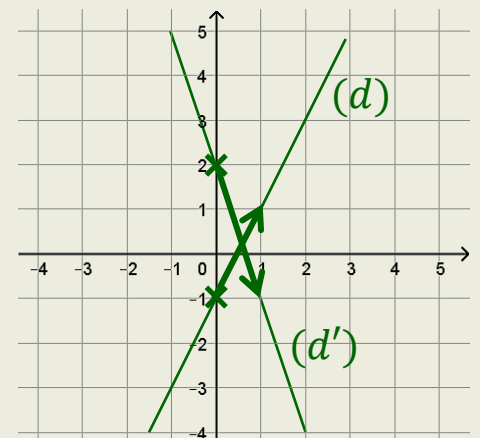
**Exemple 1** On trace :

la droite  $(d)$  passant par  $(0; -1)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

et la droite  $(d')$  passant par  $(0; 2)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Leurs **coefficients directeurs** 2 et  $-3$  sont **différents**, donc elles sont **sécantes**.

Leur point d'intersection semble avoir pour coordonnées  $(0,6; 0,2)$ .



### Exemple 2

Les deux droites ont le même coefficient directeur **7**, donc elles sont **parallèles**.  
Leurs ordonnées à l'origine sont différentes, donc elles ne sont **pas confondues**.

### Exemple 3

On calcule le déterminant des droites  $(d)$  et  $(d')$ .

Pour  $(d)$  :  $3x - 2y + 1 = 0$ , on a  $a = 3$  et  $b = -2$ ,

et pour  $(d')$  :  $-6x + 4y + 7 = 0$ , on a  $a = -6$  et  $b = 4$ .

On calcule donc  $3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = \mathbf{0}$

Donc  $(d)$  et  $(d')$  sont **parallèles**.

## 5b. Point d'intersection

Pour trouver le point d'intersection de deux droites, on peut utiliser un système d'équations.

**Exemple 1** Dans le repère ci-contre, tracer les droites

$$(d_1) : y = -2x + 4 \text{ et } (d_2) : y = 0,5x - 3$$

puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

**Exemple 2** On considère deux droites :

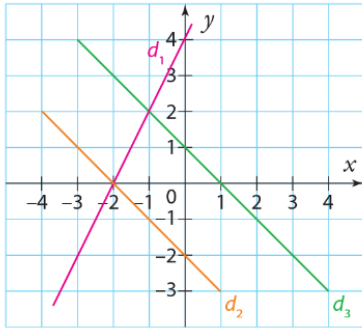
$$(d_1) : 5x + 3y - 1 = 0 \text{ et } (d_2) : -7x - y + 3 = 0.$$

a. Donner la position relative de ces deux droites en justifiant.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

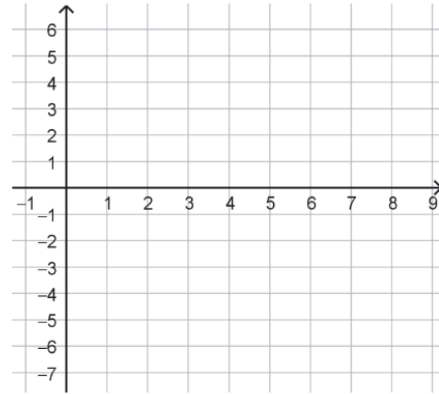
**Exemple 3** À l'aide de la représentation graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes :

a.  $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 1 \end{cases}$     b.  $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$     c.  $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x - 2 \end{cases}$



**Exemple 4** Le CDI d'un lycée a acheté 3 BD et 4 livres pour 24 €. La BD coûte 3 € de plus que le livre.

Donner une valeur approchée du prix d'un livre et d'une BD en traçant deux droites dans le repère.



**Exemple 1** On trace

- la droite  $(d_1)$  passant par  $(0; 4)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- la droite  $(d_2)$  passant par  $(0; -3)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

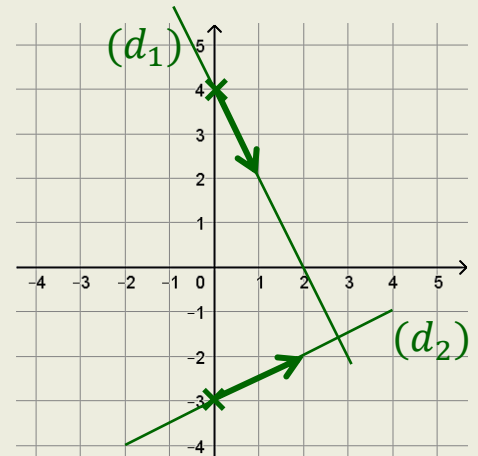
mais on préfère un vecteur directeur avec des coordonnées entières, comme  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Les droites sont **sécantes** car leurs coefficients directeurs  $-2$  et  $0,5$  sont différents.

Pour trouver le point d'intersection, on résout : 
$$\begin{cases} y = -2x + 4 & (L_1) \\ y = 0,5x - 3 & (L_2) \end{cases}$$

*On peut immédiatement substituer le  $y$  isolé de  $(L_1)$  dans la ligne  $(L_2)$ .*

$$\begin{aligned} (L_2) &\Rightarrow y = 0,5x - 3 \\ &\Leftrightarrow -2x + 4 = 0,5x - 3 \\ &\Leftrightarrow -2x - 0,5x = -3 - 4 \\ &\Leftrightarrow -2,5x = -7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-7}{-2,5} = 2,8 \end{aligned}$$



*On a trouvé  $x$ . On peut maintenant remplacer  $x$  par 2,8 dans  $(L_1)$ .*

$$(L_1) \Rightarrow y = -2x + 4 = -2 \times 2,8 + 4 = -5,6 + 4 = -1,6$$

Ainsi, les coordonnées du point d'intersection sont **(2, 8; -1, 6)**.

### Exemple 2

**a.** On calcule le déterminant des droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$ .

Pour  $(d_1)$  :  $5x + 3y - 1 = 0$ , on a  $a = 5$  et  $b = 3$ ,

et pour  $(d_2)$  :  $-7x - y + 3 = 0$ , on a  $a = -7$  et  $b = -1$ .

$$\text{On calcule donc } 5 \times (-1) - (-7) \times 3 = -5 + 21 = \mathbf{16}$$

Donc  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont **sécantes**.

$$\mathbf{b.}$$
 On résout : 
$$\begin{cases} 5x + 3y - 1 = 0 & (L_1) \\ -7x - y + 3 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

On peut résoudre ce système par combinaison (en multipliant  $(L_2)$  par 3 pour supprimer les  $y$ ), ou par substitution. Ici, j'utilise la substitution.

$$(L_1) \Rightarrow -7x - y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -y = 7x - 3 \quad \text{Attention, ici } y \text{ n'est pas isolé : il reste le signe } -.$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y = -7x + 3}$$

*On a isolé  $y$ . On va maintenant travailler dans  $(L_2)$  en remplaçant  $y$ .*

$$(L_2) \Rightarrow 5x + 3y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 3(-7x + 3) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 21x + 9 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{-16} = \mathbf{0,5}$$

*On a trouvé  $x$  ! Pour trouver  $y$ , on réutilise la ligne  $(L_1)$  où il était isolé.*

$$(L_1) \Rightarrow y = -7x + 3 = -7 \times 0,5 + 3 = -3,5 + 3 = \mathbf{-0,5}$$

Le point d'intersection a donc pour coordonnées **(0, 5; -0, 5)**.

### Exemple 3

**a.** L'équation  $y = 2x + 4$  est celle de  $d_1$ , l'équation  $y = -x + 1$  est celle de  $d_3$ . Résoudre le système revient donc à déterminer le point d'intersection de ces droites. Le couple solution est donc **(-1; 2)**.

**b.** L'équation  $y = -x - 2$  est celle de  $d_2$ , l'équation  $y = -x + 1$  est celle de  $d_3$ . Mais ces droites ont le même coefficient directeur  $-1$ , elles sont parallèles.

Le système n'a donc **pas de solution**.

**c.** L'équation  $y = 2x + 4$  est celle de  $d_1$ , l'équation  $y = -x - 2$  est celle de  $d_2$ . Elles se coupent, et le couple solution est **(-2; 0)**.

### Exemple 4

Soit  $x$  le prix d'une BD, et  $y$  le prix d'un livre.

Le problème se met en équation ainsi : 
$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 & (L_1) \\ x = y + 3 & (L_2) \end{cases}$$

Dans la ligne ( $L_1$ ), on peut isoler  $y$  pour obtenir l'équation réduite d'une droite.

$$\begin{aligned} (L_1) &\Rightarrow 3x + 4y = 24 \\ &\Leftrightarrow 4y = -3x + 24 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-3x + 24}{4} \\ &\Leftrightarrow y = -0,75x + 6 \end{aligned}$$

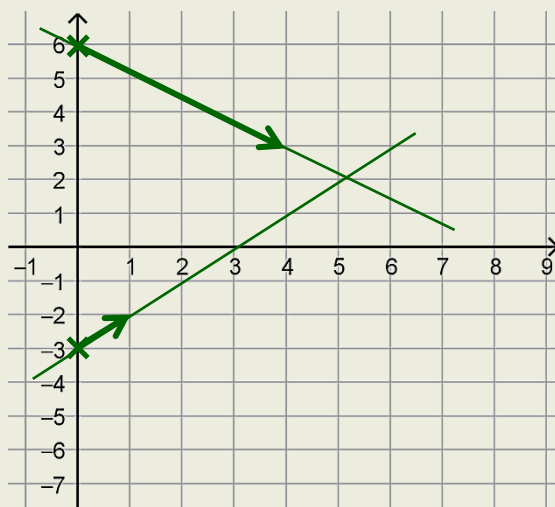
On fait de même dans la ligne ( $L_2$ ), où c'est beaucoup plus rapide.

$$\begin{aligned} (L_2) &\Rightarrow x = y + 3 \\ &\Leftrightarrow y = x - 3 \end{aligned}$$

La ligne ( $L_1$ ) nous donne une droite passant par  $(0; 6)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$ , que l'on remplace par  $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  pour avoir des coordonnées entières.

La ligne ( $L_2$ ) nous donne une droite passant par  $(0; -3)$  et dirigée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On trace ces deux droites dans le repère.



Le point d'intersection a pour coordonnées approximatives  $(5,2; 2,2)$ .

**Une BD coûte donc environ 5,20€, et un livre coûte environ 2,20€.**