

Chapitre 11 – Puissances, racines & entiers

1. Puissances

1a. Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$
 n est appelé « exposant ». n fois

- Remarques :**
- a^n est négatif si et seulement si a est négatif et n est un nombre impair.
 - un nombre à la puissance 1 est toujours égal à lui-même : $8^1 = 8$.
 - un nombre non nul à la puissance 0 est toujours égal à 1 : $4^0 = 1^0 = (-3)^0 = 1$.
C'est à cause des opérations sur les puissances. Par convention, on définit aussi $0^0 = 1$.
 - les puissances sont prioritaires sur les autres opérations : $2 \times 4^3 = 2 \times 4 \times 4 \times 4$

Exemple 1 Effectuer les calculs suivants :

a. $2^7 =$

b. $0,5^4 =$

c. $(-4)^4 =$

d. $(-2)^7 =$

e. $1^9 =$

f. $0^7 =$

g. $7^0 =$

h. $(-10)^3 =$

Exemple 2

a. Calculer les nombres suivants à la calculatrice : 4^{20} ; $4^{20} + 1$; et $4^{20} - 10$.
b. Que peut-on en déduire pour l'affichage de 4^{20} ?

Exemple 1

a. $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$

b. $0,5^4 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,0625$

c. $(-4)^4 = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = 256$

d. $(-2)^7 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -128$

e. $1^9 = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$

f. $0^7 = 0 \times 0 \times \dots \times 0 = 0$

g. $7^0 = 1$.

h. $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = -1000$.

Exemple 2

a. Les trois calculs donnent, en apparence, le même résultat (environ $1,0995 \times 10^{12}$ sur la Numworks, par exemple).

b. On en déduit que l'affichage de la calculatrice est imprécis pour de si grands nombres.

1b. Puissance négative

Soient $a \in \mathbb{R}$ non nul et $n \in \mathbb{N}$. Alors a^{-n} est l'inverse de a^n , c'est-à-dire :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}}$$

Remarques : • a^{-1} est l'inverse de a : $4^{-1} = \frac{1}{4} =$ et $10^{-1} = \frac{1}{10^1} =$

• dans $(-a)^{-n}$, ne pas confondre le « - » de n , avec celui de a qui signifie « nombre négatif »

Exemple 1 Effectuer les calculs, en donnant le résultat sous forme fractionnaire puis décimale si possible.

a. $5^{-2} =$

b. $2^{-4} =$

c. $3^{-6} =$

d. $0,25^{-3} =$

e. $(-3)^{-2} =$

f. $(-5)^{-3} =$

Exemple 2 Donner la valeur des puissances de 10 suivantes.

$10^7 =$

$10^1 =$

$10^{-5} =$

$(-10)^{-3} =$

$$4^{-1} = \frac{1}{4} = \mathbf{0,25} \quad \text{et} \quad 10^{-1} = \frac{1}{10} = \mathbf{0,1}$$

Exemple 1

a. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \mathbf{0,04}$

b. $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = \mathbf{0,0625}$

c. $3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

d. $0,25^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = \mathbf{64}$

e. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

f. $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125} = \mathbf{0,008}$

Exemple 2

$10^7 = \mathbf{10\,000\,000}$

$10^1 = \mathbf{10}$

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = \mathbf{0,000\,001}$

$(-10)^{-3} = \frac{1}{(-10)^3} = \frac{1}{-1\,000} = -\frac{1}{1\,000} = \mathbf{-0,001}$

1c. Opérations sur les puissances

Soient $a \in \mathbb{R}$ non nul et $m, n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

Attention : cela ne marche pas avec les additions/soustractions !

Par exemple, en général, $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Exemple 1 Exprimer chaque expression sous la forme a^n , où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$A = 9^2 \times 9^3 =$$

$$B = 2^{-8} \times 2^5 =$$

$$C = (-10)^9 \times (-10)^{-5} =$$

$$D = 7^6 \times 7 \times 7^{-4} =$$

$$E = \frac{42^5}{42^3} =$$

$$F = \frac{6,1^{-7}}{6,1^2} =$$

$$G = \frac{11^3}{11^{-6}} =$$

$$H = \frac{8^3 \times 8^{-5} \times 8^7}{8^6} =$$

$$I = \frac{1,3 \times 1,3^{-6} \times 1,3^3}{1,3^{-4} \times 1,3^8} =$$

$$J = 2^3 \times 32 \times 2^{-7} =$$

$$K = 5^{-4} \times 125 =$$

Exemple 2 Même consigne, mais avec des produits de puissances.

$$A = (3,1^4)^3 =$$

$$B = (10^2)^8 =$$

$$C = ((-4)^5)^3 \times (-4)^7 =$$

$$D = \frac{(10^5)^{-7}}{10^{22}} =$$

Exemple 3 Compléter avec un entier :

$$\text{a. } 7^5 \times 7^{\dots} = 7^3$$

$$\text{b. } -3 \times (-3)^{\dots} = (-3)^{11}$$

$$\text{c. } \frac{5,1^3}{5,1^{\dots}} = 5,1^{10}$$

$$\text{d. } (6^{-2})^{\dots} = 6^{18}$$

Exemple 1

$$A = 9^2 \times 9^3 = 9^{2+3} = \mathbf{9^5}$$

$$B = 2^{-8} \times 2^5 = 2^{-8+5} = \mathbf{2^{-3}}$$

$$C = (-10)^9 \times (-10)^{-5} = (-10)^{9+(-5)} = \mathbf{(-10)^4}$$

$$D = 7^6 \times 7 \times 7^{-4} = 7^{6+1+(-4)} = \mathbf{7^3}$$

$$E = \frac{42^5}{42^3} = 42^{5-3} = \mathbf{42^2}$$

$$F = \frac{6,1^{-7}}{6,1^2} = 6,1^{-7-2} = \mathbf{6,1^{-9}}$$

$$G = \frac{11^3}{11^{-6}} = 11^{3-(-6)} = \mathbf{11^9}$$

$$H = \frac{8^3 \times 8^{-5} \times 8^7}{8^6} = \frac{8^{3+(-5)+7}}{8^6} = \frac{8^5}{8^6} = 8^{5-6} = \mathbf{8^{-1}}$$

$$I = \frac{1,3 \times 1,3^{-6} \times 1,3^3}{1,3^{-4} \times 1,3^8} = \frac{1,3^{1+(-6)+3}}{1,3^{-4+8}} = \frac{1,3^{-2}}{1,3^4} = 1,3^{-2-4} = \mathbf{1,3^{-6}}$$

On remarque que $32 = 2^5$, donc $J = 2^3 \times 2^5 \times 2^{-7} = 2^{3+5+(-7)} = \mathbf{2^1}$

On remarque que $125 = 5^3$, donc $K = 5^{-4} \times 5^3 = 5^{-4+3} = \mathbf{5^{-1}}$

Exemple 2

$$A = (3,1^4)^3 = 3,1^{4 \times 3} = \mathbf{3,1^{12}}$$

$$B = (10^2)^8 = 10^{2 \times 8} = \mathbf{10^{16}}$$

$$C = ((-4)^5)^3 \times (-4)^7 = (-4)^{5 \times 3} \times (-4)^7 = (-4)^{5 \times 3 + 7} = \mathbf{(-4)^{22}}$$

$$D = \frac{(10^5)^{-7}}{10^{22}} = \frac{10^{5 \times (-7)}}{10^{22}} = \frac{10^{-35}}{10^{22}} = 10^{-35-22} = \mathbf{10^{-57}}$$

Exemple 3

a. $7^5 \times 7^{-2} = 7^3$

b. $-3 \times (-3)^{10} = (-3)^{11}$

c. $\frac{5,1^3}{5,1^{-7}} = 5,1^{10}$

d. $(6^{-2})^{-9} = 6^{18}$

1d. Puissances identiques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non nul et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$a^n \times b^n = (ab)^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemple Exprimer chaque expression sous la forme a^n , où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$A = 5^4 \times 2^4 =$$

$$B = (-7)^{-3} \times 5^{-3} =$$

$$C = \frac{77^8}{11^8} =$$

$$D = \frac{(-10)^{-9}}{(-2)^{-9}} =$$

$$E = 4^7 \times 3^7 \times 12^{-5} =$$

$$F = \frac{42^3}{7^3} \times 6^{-4} =$$

$$A = 5^4 \times 2^4 = (5 \times 2)^4 = \mathbf{10^4}$$

$$B = (-7)^{-3} \times 5^{-3} = (-7 \times 5)^{-3} = \mathbf{(-35)^{-3}}$$

$$C = \frac{77^8}{11^8} = \left(\frac{77}{11}\right)^8 = \mathbf{7^8}$$

$$D = \frac{(-10)^{-9}}{(-2)^{-9}} = \left(\frac{-10}{-2}\right)^{-9} = \mathbf{5^{-9}}$$

$$E = 4^7 \times 3^7 \times 12^{-5} = (4 \times 3)^7 \times 12^{-5} = 12^7 \times 12^{-5} = 12^{7+(-5)} = \mathbf{12^2}$$

$$F = \frac{42^3}{7^3} \times 6^{-4} = \left(\frac{42}{7}\right)^3 \times 6^{-4} = 6^3 \times 6^{-4} = 6^{3+(-4)} = \mathbf{6^{-1}}$$

2. Applications

2a. Notation scientifique

Tout nombre décimal non nul peut être écrit sous la forme $a \times 10^{-n}$ où $a \in [1; 10[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1 Écrire les nombres suivants en notation scientifique.

$$A = 851\,000 \quad B = 6\,000\,000 \quad C = 0,000\,81 \quad D = 413 \times 10^4 \quad E = 0,269 \times 10^{-5}$$

Exemple 2 Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant.

$$A = 5,6846 \times 10^{26} \quad B = 8,68 \times 10^{25} \quad C = 4,869 \times 10^{24} \quad D = 3,302 \times 10^{23} \quad E = 1,0243 \times 10^{26}$$

- Exemple 3**
- À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 10^{-4} du nombre 3π .
 - À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 10^{-3} du nombre $\sqrt{7}$.
 - Donner une valeur approchée à 10^{-3} de $\sqrt{7}$.

Exemple 4 Exprimer les grandeurs suivantes en écriture scientifique, à l'aide des unités de base (m, Wh...)

- Distance Terre-Soleil : 149 600 000 km
- Rayon d'un atome d'oxygène : 15,2 nm
- Production totale d'électricité en France en 2024 : 536,5 TWh

Exemple 1

$$\begin{aligned} A &= 851\,000 = \mathbf{8,51 \times 10^5} \\ B &= 6\,000\,000 = \mathbf{6 \times 10^6} \\ C &= 0,000\,81 = \mathbf{8,1 \times 10^{-4}} \\ D &= 413 \times 10^4 = 4,13 \times 10^2 \times 10^4 = \mathbf{4,13 \times 10^6} \\ E &= 0,269 \times 10^{-5} = 2,69 \times 10^{-1} \times 10^{-5} = \mathbf{2,69 \times 10^{-6}} \end{aligned}$$

Exemple 2 *En notation scientifique, pour ranger des nombres dans l'ordre croissant, il faut d'abord regarder l'exposant (10^{26} est plus grand que 10^{25} par exemple), puis la mantisse (le nombre qui multiplie la puissance de 10).*

$$\mathbf{D < C < B < E < A}$$

Exemple 3 L'exposant donne le nombre de chiffres après la virgule qu'il faut écrire. Par exemple, dans un encadrement ou un arrondi à 10^{-4} , on écrit 4 chiffres après la virgule.

- On calcule $3\pi \approx 9,42478$ donc $\mathbf{9,4247 < 3\pi < 9,4248}$
- On calcule $\sqrt{7} \approx 2,64575$ donc $\mathbf{2,645 < \sqrt{7} < 2,646}$
- Le chiffre suivant dans l'écriture décimale de $\sqrt{7}$ est un 7, donc on arrondit à la valeur par excès (la plus grande) : $\mathbf{\sqrt{7} \approx 2,646}$

Exemple 4

- $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, et $149\,600\,000 \times 10^3 = 1,496 \times 10^8 \times 10^3 = \mathbf{1,496 \times 10^{11} \text{ m}}$
- $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$, et $15,2 \times 10^{-9} = 15,2 \times 10^1 \times 10^{-9} = \mathbf{1,52 \times 10^{-8} \text{ m}}$
- $1 \text{ TWh} = 10^{12} \text{ Wh}$, et $536,5 \times 10^{12} = 5,365 \times 10^2 \times 10^{12} = \mathbf{5,365 \times 10^{14} \text{ Wh}}$

2b. Factorisations

Les puissances permettent de **factoriser des expressions**.

Exemple 1 Factoriser chaque expression.

$$A = x^3 - 5x^2$$

$$B = t^4 + 6t^3 - t^2$$

$$C = 8x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$D = ax^7 + x^4 + bx^5$$

Exemple 2 Factoriser chaque expression par le facteur donné.

a. Factoriser par $-x^2$: $A = -x^6 + x^3 - 5x^2$

b. Factoriser par n^3 : $B = -n^6 + n^3 - 5n^2$

c. Factoriser par x : $C = x^2 + 4x + 5$

d. Factoriser par x^2 : $D = 7x^2 - 4x + 1$

e. Factoriser par $\frac{1}{x}$: $E = \frac{3}{x} + 1$

f. Factoriser par $\frac{1}{x^2}$: $F = \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} - 3$

g. Factoriser par a^x : $G = 3a^x + a^{2x} + 1$

h. Factoriser par a^x : $H = a^{x+1} - 3a^x + 2$

Exemple 3 Simplifier chaque fraction par le facteur donné.

a. Simplifier par x : $A = \frac{4x^2 - 3x}{x^3}$

b. Simplifier par x^2 : $B = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^5 + x^2}$

c. Simplifier par x : $C = \frac{7x + 4}{x - 1}$

d. Simplifier par x^2 : $D = \frac{4x^2 - 7}{x^2 - x}$

Exemple 1

$$A = x^3 - 5x^2$$

$$A = x^2 \times x - x^2 \times 5$$

$$A = x^2(x - 5)$$

$$B = t^4 + 6t^3 - t^2$$

$$B = t^2 \times t^2 + t^2 \times 6t - t^2 \times 1$$

$$B = t^2(t^2 + 6t - 1)$$

$$C = 8x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$C = 2x \times 4x^2 - 2x \times 5x + 2x \times 3$$

$$C = 2x(4x^2 - 5x + 3)$$

$$D = ax^7 + x^4 + bx^5$$

$$D = x^4 \times ax^3 + x^4 \times 1 + x^4 \times bx$$

$$D = x^4(ax^3 + 1 + bx)$$

Exemple 2

$$A = -x^6 + x^3 - 5x^2$$

$$A = x^2 \times (-x^4) + x^2 \times x - x^2 \times 5$$

$$A = x^2(-x^4 + x - 5)$$

$$B = -n^6 + n^3 - 5n^2$$

$$B = n^3 \times (-n^3) + n^3 \times 1 - n^3 \times \frac{5}{n}$$

$$B = n^3 \left(-n^3 + 1 - \frac{5}{n} \right)$$

$$C = x^2 + 4x + 5$$

$$C = x \times x + x \times 4 - x \times \frac{1}{x}$$

$$C = x \left(x + 4 - \frac{1}{x} \right)$$

$$D = 7x^2 - 4x + 1$$

$$D = x^2 \times 7 - x^2 \times \frac{4}{x} + x^2 \times \frac{1}{x^2}$$

$$D = x^2 \left(7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$E = \frac{3}{x} + 1$$

$$E = \frac{1}{x} \times 3 + \frac{1}{x} \times x$$

$$E = \frac{1}{x} (3 + x)$$

$$G = 3a^x + a^{2x} + 1$$

$$G = a^x \times 3 + a^x \times a^x + a^x \times \frac{1}{a^x}$$

$$G = a^x \left(3 + a^x + \frac{1}{a^x} \right)$$

$$F = \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} - 3$$

$$F = \frac{1}{x^2} \times 6x - \frac{1}{x^2} \times 1 - \frac{1}{x^2} \times 3x^2$$

$$F = \frac{1}{x^2} (6x - 1 - 3x^2)$$

$$H = a^{x+1} - 3a^x + 2$$

$$H = a^x \times a - a^x \times 3 + a^x + \frac{2}{a^x}$$

$$H = a^x \left(a - 3 + \frac{2}{a^x} \right)$$

Exemple 3

$$A = \frac{4x^2 - 3x}{x^3}$$

$$A = \frac{x \times 4x - x \times 3}{x \times x^2}$$

$$A = \frac{x(4x - 3)}{x \times x^2}$$

$$A = \frac{4x - 3}{x^2}$$

$$C = \frac{7x + 4}{x - 1}$$

$$C = \frac{x \times 7 + x \times \frac{4}{x}}{x \times 1 - x \times \frac{1}{x}}$$

$$C = \frac{x \left(7 + \frac{4}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}$$

$$C = \frac{7 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$B = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^5 + x^2}$$

$$B = \frac{x^2 \times 3x^2 - x^2 \times 2}{x^2 \times x^3 + x^2 \times 1}$$

$$B = \frac{x^2(3x^2 - 2)}{x^2(x^3 + 1)}$$

$$B = \frac{3x^2 - 2}{x^3 + 1}$$

$$D = \frac{4x^2 - 7}{x^2 - x}$$

$$D = \frac{x^2 \times 4 - x^2 \times \frac{7}{x^2}}{x^2 \times 1 - x^2 \times \frac{1}{x}}$$

$$D = \frac{x^2 \left(4 - \frac{7}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}$$

$$D = \frac{4 - \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

2c. Puissances et signe

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- x^n est nul si et seulement si x est nul.
- si n est pair, alors x^n est toujours positif
- si n est impair, alors x^n est du même signe que x .

Exemple : Dresser le tableau de signe des expressions suivantes.

$$A(x) = (6x - 18)^4 \quad B(x) = 2x \left(\frac{x}{3} + 4 \right)^7 \quad C(x) = \frac{-5(x - 3)^2}{(2x + 4)^3} \quad D(x) = -\frac{x^2 - 12x + 36}{x^3}$$

• $A(x) = (6x - 18)^4$

$$6x - 18 \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 18 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Le tableau de $6x - 18$, sans la puissance 4, serait celui-ci :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$6x - 18$		-	0		+

Mais un nombre à la puissance paire étant toujours positif, le tableau de $(6x - 18)^4$ est le suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$(6x - 18)^4$		+	0		+

• $B(x) = 2x \left(\frac{x}{3} + 4 \right)^7$

$$2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{et } \frac{x}{3} + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -12$$

Ici, la puissance est impaire, donc l'expression peut être négative.

x	$-\infty$		-12		0		$+\infty$
$2x$		-		-	0		+
$\left(\frac{x}{3} + 4\right)^7$		-	0	+		+	
$B(x)$		+	0	-	0		+

• $C(x) = \frac{-5(x - 3)^2}{(2x + 4)^3}$

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3,$$

mais un carré est toujours positif

$$\text{et } 2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2$$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-5		-		-		-	
$(x - 3)^2$		+		+	0		+
$(2x + 4)^3$		-	0	+		+	
$C(x)$		+		-	0		-

• $D(x) = -\frac{x^2 - 12x + 36}{x^3} = -\frac{(x - 6)^2}{x^3}$

$$x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$$

On n'oublie pas le signe - devant la fraction, qui change le signe du résultat.

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$(x - 6)^2$		+		+	0		+
x^3		-	0	+		+	
$D(x)$		+		-	0		-

3. Racines

3a. Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que a est positif). Alors la racine carrée de a , notée \sqrt{a} , est le réel positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple 1 Calculer, si possible, les racines suivantes.

$$\sqrt{81} = \quad \sqrt{144} = \quad \sqrt{1} = \quad \sqrt{0} = \quad \sqrt{-1} =$$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. \sqrt{n} est **soit un nombre entier** (quand n est un carré parfait), **soit un irrationnel**.

Exemple 2 Calculer, en donnant une valeur approchée si nécessaire.

$$\sqrt{100} \quad \sqrt{1\,000} \quad \sqrt{40} \quad \sqrt{400}$$

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$, où $|x|$ est la valeur absolue de x (toujours positive).

Exemple 1

$\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{-1}$ n'existe pas.

Exemple 2

$\sqrt{100} = 10$ car 100 est un carré parfait.

$\sqrt{1\,000} \approx 31,62$ car 1 000 n'est pas un carré parfait.

$\sqrt{40} \approx 6,32$

$\sqrt{400} = 20$

3b. Produits et forme $a\sqrt{b}$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Attention : cela ne marche pas avec les additions/soustractions !

Par exemple, en général, $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemple 1 Calculer $A = \sqrt{3} \times \sqrt{12}$; $B = \sqrt{24,5} \times \sqrt{2}$ et $C = (2\sqrt{3})^2$

Exemple 2 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers, b le plus petit possible.

$$A = \sqrt{75} \quad B = \sqrt{12} \quad C = \sqrt{700} \quad D = \sqrt{32} \quad E = \sqrt{162}$$

Exemple 3 Réduire les expressions pour les écrire sous la forme $a\sqrt{2}$ ou $a\sqrt{3}$, où $a \in \mathbb{Z}$.

$$A = 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \quad B = 5\sqrt{18} \quad C = \sqrt{12} - 7\sqrt{27}$$
$$D = \sqrt{50} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8} \quad E = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \quad F = \sqrt{7} \times 3\sqrt{14}$$

Exemple 1

$$A = \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$B = \sqrt{24,5} \times \sqrt{2} = B = \sqrt{24,5 \times 2} = \sqrt{49} = 7$$

$$C = (2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$$

Exemple 2

La technique consiste à écrire le nombre à l'intérieur de la racine sous la forme d'un produit avec un carré parfait. On peut alors utiliser la propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$$A = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{700} = \sqrt{100 \times 7} = \sqrt{100} \times \sqrt{7} = 10\sqrt{7}$$

$$D = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$E = \sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = \sqrt{81} \times \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Exemple 3 *On peut ajouter/soustraire des $\sqrt{2}$ comme on le ferait avec des x .*

$$A = 4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

$$B = 5\sqrt{18} = 5 \times \sqrt{9 \times 2} = 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{12} - 7\sqrt{27}$$

$$= \sqrt{4 \times 3} - 7\sqrt{9 \times 3}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 7 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 21\sqrt{3}$$

$$= -19\sqrt{3}$$

$$D = \sqrt{50} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}$$

$$= \sqrt{25} \times \sqrt{2} + \sqrt{9} \times \sqrt{2} - 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

$$E = \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ Pour tout } a \in \mathbb{R}, \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a.$$

$$F = \sqrt{7} \times 3\sqrt{14} = F = \sqrt{7} \times 3\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times 3 \times \sqrt{2} = 7 \times 3\sqrt{2} = 21\sqrt{2}$$

3c. Quotients

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple 1 Calculer les expressions suivantes :

$$A = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \quad B = \sqrt{\frac{16}{49}} \quad C = \sqrt{\frac{1}{25}} \quad D = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{6}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} \quad E = \sqrt{\frac{7}{(-4)^2}} \quad F = \frac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{20}}$$

Méthode : on cherche parfois à se débarrasser des racines au dénominateur d'une fraction. Pour cela, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par la racine au dénominateur.

Exemple 2 Écrire sans radical (le symbole $\sqrt{\quad}$) au dénominateur.

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C = \frac{2}{3\sqrt{6}} \quad D = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$$

Exemple 3 Montrer que $A = \frac{5\sqrt{48}}{4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Exemple 1

$$A = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$B = \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{25}$$

$$D = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{6}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{7}$$

$$E = \sqrt{\frac{7}{(-4)^2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{(-4)^2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$F = \frac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{20}} = \frac{8\sqrt{5}}{3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}} = \frac{8}{3 \times 2} = \frac{4}{3}$$

Exemple 2

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{2 \times \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$D = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Exemple 3 $A = \frac{5\sqrt{48}}{4\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3} \times \sqrt{16}}{4\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{16}}{4} = \frac{5 \times 4}{4} = 5$ qui est bien entier.

4. Multiples et diviseurs

4a. Définition

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on dit que a est multiple de b , ou que b est un diviseur de a s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$.

Remarques : • les propositions suivantes ont le même sens :

« a est multiple de b » « b est un diviseur de a » « b divise a » « a est divisible par b »

- 1 divise tous les nombres, et 0 est multiple de tous les nombres.
- une fraction est **irréductible** si le numérateur et le dénominateur n'ont **aucun diviseur commun** (à part 1)

Exemple 1 a. 6 est-il un diviseur de 42 ? b. 4 est-il un diviseur de 66 ? c. 5 est-il un diviseur de 105 ?

d. Écrire la liste des diviseurs positifs de 18 :

de 15 :

de 60 :

de 100 :

de 7 :

e. Écrire la liste des diviseurs positifs de 1600 inférieurs à 24 :

Propriétés (critères de divisibilité) :

- Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.
- Un nombre est divisible par 3 ou par 9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 ou par 9.
- Un nombre est divisible par 11 si la somme alternée de ses chiffres est elle-même divisible par 11.

Exemple 2 Parmi les nombres 246 ; 325 ; 4 932 et 6 139, indiquer ceux qui sont divisibles :

a. par 3 b. par 4 c. par 5 d. par 9

Exemple 3 Prouver facilement que la fraction $\frac{771}{1035}$ n'est pas irréductible.

Exemple 1 a. $42 = 7 \times 6$, donc 6 est un diviseur de 42.

b. $66 = 15,5 \times 4$, donc 4 n'est pas un diviseur de 66.

c. $105 = 21 \times 5$, donc 5 est un diviseur de 105.

d. • 18 a pour diviseurs : 1 ; 2 ; 9 et 18.

• 15 a pour diviseurs : 1 ; 3 ; 5 et 15.

• 60 a pour diviseurs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 et 60

• 100 a pour diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 50 ; 100

• 7 a pour diviseurs : 1 et 7. *C'est un nombre premier.*

e. 1 600 est divisible par 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 et 20.

Exemple 2

• $2 + 4 + 6 = 12$, donc 246 est divisible **par 3, mais pas par 9**.

46 n'est **pas divisible par 4**, donc 246 non plus. Il n'est pas **divisible par 5**.

• $3 + 2 + 5 = 10$, donc 325 n'est divisible **ni par 3, ni par 9**.

25 n'est **pas divisible par 4**, donc 325 non plus. Il est **divisible par 5**.

• $4 + 9 + 3 + 2 = 18$, donc **4 932** est divisible **par 3 et par 9**.

32 est **divisible par 4**, donc 4 932 aussi. Il n'est **pas divisible par 5**.

• $6 + 1 + 3 + 9 = 19$, donc **6 139** n'est divisible **ni par 3, ni par 9**.

39 n'est **pas divisible par 4**, donc 6 139 non plus. Il n'est **pas divisible par 5**.

Exemple 3

$7 + 7 + 1 = 15$ et $1 + 0 + 3 + 5 = 9$, donc 771 et 1 035 sont tous les deux **divisibles par 3**. La fraction n'est donc **pas irréductible**.

4b. Opérations sur les multiples

Soit $b \in \mathbb{Z}$. Si $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont deux multiples de b , alors $(m + n)$ et $(m - n)$ sont aussi multiples de b .

Exemple 1 Démontrer la propriété :

« Soit $b \in \mathbb{Z}$. Si $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont deux multiples de b , alors $(m + n)$ est multiple de b ».

- Exemple 2**
- Justifier que 42 et 6 300 sont divisibles par 7.
 - En déduire que 6 342 est divisible par 7.
 - En utilisant la même méthode, montrer que 6 349 147 est divisible par 7.

Exemple 1

Si m est multiple de b , alors il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kb$.

De même, si n est multiple de b , alors il existe un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = k'b$.

Donc $m + n = kb + k'b = b(k + k')$.

Nous venons de factoriser $(m + n)$ par b , donc **$(m + n)$ est bien multiple de b .**

Exemple 2

a. $42 = 6 \times 7$ et $6\,300 = 900 \times 7$, donc ces nombres sont **divisibles par 7**.

b. $6\,342 = 6\,300 + 42$, cette somme de nombre divisibles par 7 est donc aussi **divisible par 7**.

c. $6\,349\,147 = 6\,300\,000 + 49\,000 + 140 + 7$, qui sont tous séparément des multiples de 7. Donc **6 349 147 est divisible par 7**.

4c. Division euclidienne

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ non nul.

Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est **trouver un quotient q et un reste r avec $0 \leq r < b$** , tel que :

$$a = bq + r$$

a est multiple de b si et seulement si le reste r est nul.

Exemple 1 Effectuer la division euclidienne et donner l'équation $a = bq + r$ pour :

a. 63 par 4

b. 218 par 12

c. 3 245 par 135

d. 32 par 50

Exemple 2 a. Dans une division euclidienne, le diviseur est 14, le quotient est 18 et le reste est 5. Quel est le dividende (le nombre divisé) ?

b. Dans la division euclidienne de 2 654 par 12, le quotient est 221. Déterminer le reste.

c. Dans une bibliothèque, il y a 360 livres qu'il faut ranger sur des étagères contenant 22 livres chacune. Combien faut-il d'étagères pour ranger tous ces livres ?

d. Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du monde en 80 jours. Combien cela représente-t-il de semaines ? S'il part un jeudi, quel jour reviendra-t-il ?

Exemple 1

a. $63 = 4 \times 15 + 3$

b. $218 = 12 \times 18 + 2$

c. $3\,245 = 24 \times 135 + 5$

c. $32 = 0 \times 50 + 32$

Exemple 2

a. On peut recalculer $14 \times 18 + 5 = 252 + 5 = 257$

b. On calcule $12 \times 221 = 2\,652$. Donc le reste est $2\,654 - 2\,652 = 2$

c. On effectue la division euclidienne $360 = 22 \times 16 + 8$

Les livres rempliront donc 16 étagères entières, mais il restera alors 8 livres à ranger sur une dernière étagère. Il en faut donc **17**.

d. On calcule $80 = 11 \times 7 + 3$. Il lui faudra donc **11 semaines** (et 3 jours). S'il part un jeudi, il arrivera 3 jours de semaine plus tard, c'est-à-dire un **dimanche**.

4d. Nombres pairs et impairs

Un nombre entier n est dit **pair** s'il est multiple de 2, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

Sinon, il est **impair**, et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

Propriétés : soient a et b entiers.

- ① si a et b sont pairs alors $a + b$ est
- ② si a et b sont impairs alors $a + b$ est
- ③ si a est pair et b impair alors $a + b$ est

Remarque : ici, tout ce qui est vrai pour $a + b$ l'est aussi pour $a - b$.

- ④ si a est pair a alors $a \times b$ est
- ⑤ si a est impair alors a^2 est

Exemple 1 On considère un entier naturel n .

Déterminer la parité des nombres $A = 2n + 6$; $B = 40n + 1$ et $C = 5n + 3$

Exemple 2 Montrer que la somme de trois nombres impairs est impaire.

- ① si a et b sont pairs alors $a + b$ est **pair**,
- ② si a et b sont impairs alors $a + b$ est **pair**,
- ③ si a est pair et b impair alors $a + b$ est **impair**,
- ④ si a est pair alors $a \times b$ est **pair**,
- ⑤ si a est impair alors a^2 est **impair**.

Exemple 1

- $2n$ est pair et 6 aussi, donc $A = 2n + 6$ est **pair**.
- $40n$ est pair et 1 est impair, donc $B = 40n + 1$ est **impair**.
- La réponse dépend de la parité de n !

Si n est pair, alors $5n$ est également pair, et $C = 5n + 3$ est **impair**.

Si n est impair, alors $5n$ est également impair, et $C = 5n + 3$ est **pair**.

Exemple 2

Appelons les nombres impairs a, b et c .

$a + b$ est donc pair, et ainsi $a + b + c = (a + b) + c$ est la somme d'un pair et d'un impair. Cette somme est donc **impaire**.

4e. Nombres premiers

Un entier naturel différent de 0 ou de 1 est dit **premier** si **ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même**.

Exemple 1 Les nombres suivants sont-ils premiers ? Sinon, citer des diviseurs.

- 13
- 2
- 841 107
- 39
- 91
- 101

Exemple 2 Lister les nombres premiers inférieurs à 50.

Propriété : Tout nombre entier peut s'écrire de façon **unique** à l'ordre près sous la forme d'un **produit de nombres premiers**. C'est la **décomposition en facteurs premiers**.

Exemple 3 Donner la décomposition en facteurs premiers de :

- 42
- 162
- 300
- 350

Exemple 1

- 13 est **premier**
- 2 est **premier**
- 841 107 n'est **pas premier**, car il est divisible par 3 ($8 + 4 + 1 + 1 + 0 + 7 = 21$)
- 39 n'est **pas premier**, car $39 = 3 \times 13$
- 91 n'est **pas premier**, car $91 = 7 \times 13$
- 101 est **premier**

Exemple 2

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 et 47.

Exemple 3

- $42 = 2 \times 3 \times 7$
- $162 = 2 \times 3^4$
- $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
- $350 = 2 \times 5^2 \times 7$