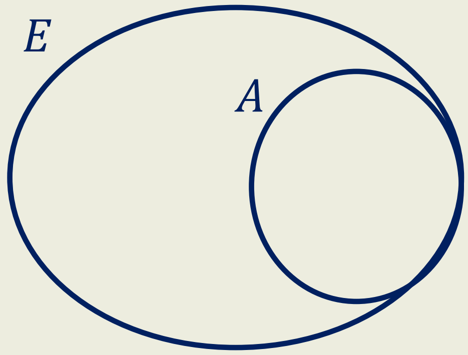
Chapitre 1 – Proportions et évolutions

1. Proportions



1a. Définition

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble.
On appelle effectif le nombre d'éléments de A,
et effectif total le nombre d'éléments de E.

La proportion des éléments de A par rapport à E (appelée aussi fréquence) est : $\text{proportion} = \dfrac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$

C'est un nombre entre 0 et 1.

Exemple 1 Lors d'un contrôle de vitesse sur une autoroute, 1 404 véhicules sont passés devant un radar. 81 d'entre eux circulaient trop vite.
Quelle est la proportion de véhicules qui circulaient trop vite ?

Exemple 2 Sur les 120 employés que compte une entreprise, il y a 54 hommes. Quelle est la proportion de femmes dans l'entreprise ?

Exemple 1

L'effectif total est 1 404, l'effectif des véhicules qui circulent trop vite est 81.

La proportion de véhicules circulant trop vite est $\mathbf{\dfrac{81}{1\,404}}$.

On peut simplifier cette fraction par 9, puis par 3 : $\dfrac{81}{1\,404} = \dfrac{9}{156} = \mathbf{\dfrac{3}{52}}$

ou donner une valeur approchée au centième : $\dfrac{81}{1\,404} \approx \mathbf{0,06}$

Exemple 2

La proportion de femmes dans l'entreprise est $\mathbf{\dfrac{54}{120}}$.

On peut simplifier cette fraction par 6 : $\dfrac{54}{120} = \mathbf{\dfrac{9}{20}}$

ou donner une valeur décimale : $\dfrac{54}{120} = \mathbf{0,45}$

1b. Pourcentages

Un pourcentage est une fraction de dénominateur 100.
Les proportions sont souvent exprimées en pourcentage.

Exemple 1 Convertir les pourcentages en nombres décimaux, et vice-versa.

37% =	4% =	80% =	3,7% =	87,4% =
0,23 =	0,086 =	0,06 =	0,9 =	0,003 =

Exemple 2 Lors d'une élection, dans une commune où 480 votes ont été exprimés, un candidat a obtenu 132 voix. Calculer le pourcentage de votes pour ce candidat.

Exemple 3 Le tableau suivant détaille les boîtes vendues par un chocolatier lors d'un salon du chocolat.
a. Compléter le tableau.
Les réponses sont à arrondir à l'unité.
b. Quelle est le pourcentage de boîtes vendues le samedi par rapport au total ?
c. Quelle est la proportion de boîtes de chocolat noir parmi les boîtes vendues le samedi ?
d. Quelle est la proportion de boîtes de chocolat pralinés vendues le samedi parmi le total de boîtes vendues ?

	Samedi	Dimanche	**Total**
Chocolat noir	45	68	
Chocolat praliné	80		
Total		165	

Exemple 1
Pour convertir un pourcentage en nombre décimal, on décale la virgule de deux rangs à droite. 37% = **0,37**; 4% = **0,04**; 80% = **0,8**; 3,7% = **0,037** ; 87,4% = **0,874**
Et pour l'opération inverse, on décale la virgule de deux rangs à gauche.
0,23 = **23%** ; 0,086 = **8,6%** ; 0,06 = **6%** ; 0,9 = **90%** et 0,003 = **0,3%.**

Exemple 2 La proportion de voix pour le candidat est $\frac{132}{480} = 0{,}27 = \mathbf{27,5}\%$.

Exemple 3
b. Au total, 125 boîtes ont été vendus le samedi, ce qui représente $\frac{125}{290} \approx 0{,}43 \approx \mathbf{43}\%$.

	Samedi	Dimanche	Total
Chocolat noir	45	68	**113**
Chocolat praliné	80	**97**	**177**
Total	**125**	165	**290**

c. Sur les 125 boîtes vendues le samedi, 45 contiennent du chocolat noir, ce qui représente $\frac{45}{125} = 0{,}36 = \mathbf{36}\%$ des boîtes vendues le samedi.
d. Sur les 290 boîtes vendues au total, 80 sont des boîtes de chocolats pralinés vendues le samedi, ce qui représente $\frac{80}{290} \approx 0{,}28 \approx \mathbf{28}\%$ du total.

2. Calculs associés aux proportions

2a. Effectif et effectif total

• pour appliquer une proportion,
on la multiplie par l'effectif total : effectif = effectif total × proportion

• si on connaît la proportion et l'effectif : $\text{effectif total} = \dfrac{\text{effectif}}{\text{proportion}}$

Exemple 1 **a.** Un pot de 350 g de confiture contient 45% de fruits.
Quelle est la masse de fruits contenue dans le pot ?
b. Lors d'une élection, dans une commune où 480 votes ont été exprimés, une candidate a obtenu 11,25 % des voix. Calculer le nombre de personnes qui ont voté pour elle.

Exemple 2 Lors d'un match, 60% des places ont été vendues aux supporteurs du club local, soit 900 places. Quelle est la capacité du stade ?

Exemple 3 Selon une étude, la fréquence du nombre de gauchers en France est de 0,127.
La population française est de 67 millions. Combien y a-t-il de gauchers en France ?

Exemple 4 Une boulangerie a vendu 148 pains au chocolat pendant une journée. On estime que cela représente 37% des viennoiseries vendues ce jour-là. Combien de viennoiseries ont été vendues ?

Exemple 5 Dans une usine, 28 pièces fabriquées lors d'une journée sont défectueuses.
On sait que cela représente 3,5% du total des pièces fabriquées ce jour.
Combien de pièces non défectueuses ont été fabriquées ?

Exemple 1
a. *On nous donne l'effectif total et la proportion, et on cherche l'effectif.*
45% $= 0{,}45$ donc on calcule $350 \times 0{,}45 = \mathbf{157{,}5}$ g de fruits dans le pot.
b. *À nouveau, on cherche un effectif alors qu'on connaît le total et une proportion.*
11,25% $= 0{,}112\,5$ donc on calcule $480 \times 0{,}112\,5 = \mathbf{54}$ voix obtenues.

Exemple 2 *Ici c'est différent : le nombre 900 correspond à l'effectif d'une partie (les places vendues aux supporteurs locaux) et on recherche l'effectif total.*
60% = 0,6 donc on calcule $\dfrac{900}{0{,}6} = \mathbf{1\,500}$ places au total.

Exemple 3 $67\,000\,000 \times 0{,}127 = \mathbf{8\,509\,000}$ donc il y a environ 8,509 millions de gauchers en France.

Exemple 4 *À nouveau, on cherche un effectif total en connaissant l'effectif d'une partie.* 37% = 0,37 donc on calcule $\dfrac{148}{0{,}37} = \mathbf{400}$ viennoiseries au total.

Exemple 5 3,5% = 0,035 donc on calcule $\dfrac{28}{0{,}035} = 800$ pièces au total.
Le nombre de pièces non défectueuses est donc $800 - 28 = \mathbf{762}$.

2b. Proportions successives

On peut appliquer plusieurs proportions d'affilée, en faisant éventuellement un schéma.

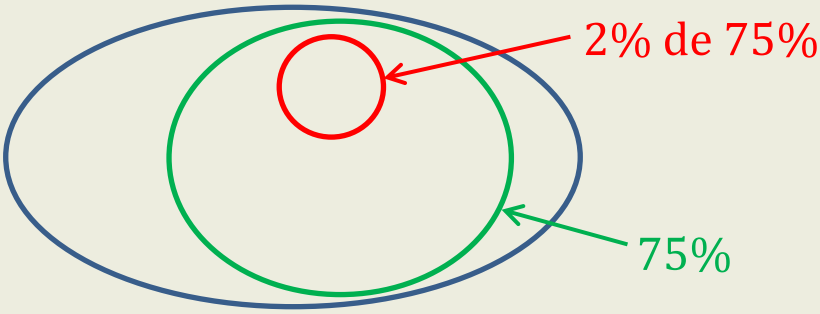
Exemple 1 Dans un champ, 800 pommes ont été récoltées. On sait que 75% des pommes récoltées sont des pommes vertes, et que 2% d'entre elles présentent un défaut.
Combien a-t-on récolté de pommes vertes présentant un défaut ?

Exemple 2 Les élèves de BTS représentent 12% des élèves d'un lycée. Or, sur le site internet du lycée, on peut lire que 35% des élèves de BTS sont en formation par alternance, et que ce sont les seuls élèves concernés par les formations en alternance.
Quel est la proportion d'élèves du lycée qui suivent une formation en alternance ?

Exemple 3 On effectue un sondage sur des spectateurs sortant d'une séance de cinéma, qui révèle que 60% des spectateurs ont apprécié le film. Parmi ceux qui ont apprécié le film, 90% ont aimé les dialogues, et 25% des personnes qui n'ont pas apprécié le film ont quand même aimé les dialogues.
Calculer la proportion de spectateurs qui ont aimé les dialogues.

Exemple 1

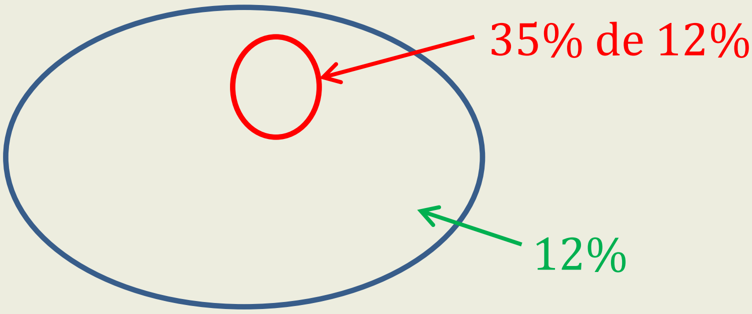
75% = 0,75, donc on calcule
$800 \times 0{,}75 = 600$ pommes vertes récoltées.
Sur ces 600 pommes vertes, 2% présentent un défaut, or
$600 \times 0{,}02 = 12$



On a donc récolté **12** pommes vertes présentant un défaut.

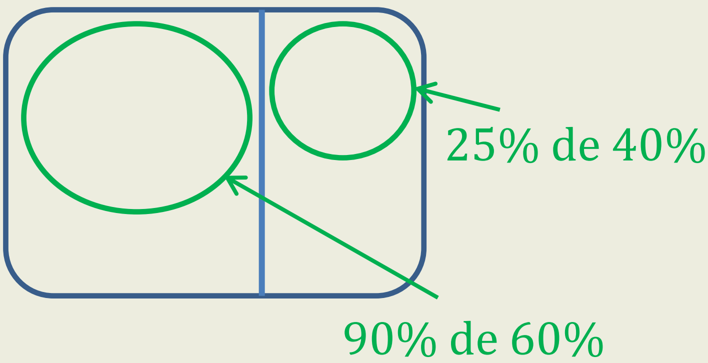
Exemple 2

On doit calculer 12% de 35%, ce qui revient à multiplier les proportions.
$0{,}12 \times 0{,}35 = 0{,}042$, donc **4,2%** des élèves du lycée sont en alternance.



Exemple 3

- Parmi les 60% des spectateurs ayant apprécié le film, 90% ont aimé les dialogues. Or $0{,}6 \times 0{,}9 = 0{,}54$, donc **54%** des spectateurs ont apprécié le film et aimé les dialogues.
- Il reste 40% de personnes qui n'ont pas apprécié le film, mais 25% d'entre elles ont quand même aimé les dialogues. Or $0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$, donc **10%** des spectateurs n'ont pas aimé le film mais ont aimé les dialogues



- Ainsi, $0{,}54 + 0{,}1 = 0{,}64 =$ **64**% des spectateurs ont aimé les dialogues.

3. Évolutions

3a. Taux et coefficient

Ici, on considère une quantité q_1 qui évolue en une quantité q_2.

$$q_1 \xrightarrow{\times c} q_2$$

Définitions : • la variation absolue est $q_2 - q_1$

• le coefficient multiplicateur est $c = \dfrac{q_2}{q_1}$

C'est le nombre par lequel on multiplie pour passer de q_1 à q_2.
Il est supérieur à 1 en cas d'augmentation, inférieur à 1 sinon.

• le taux d'évolution est le nombre $t = c - 1 = \dfrac{q_2 - q_1}{q_1}$

Il s'exprime souvent en pourcentage.

Exemples Dans chaque cas, calculer le taux d'évolution et le coefficient, en arrondissant au centième.

	Taux d'évolution	**Coefficient**
La fréquentation d'un stade est passée de 5 120 à 7 530.		
Un pull coûtait 35€, mais son prix a baissé à 21€.		
Le temps moyen passé sur un écran est de 5h07 par jour, contre 3h10 il y a dix ans.		

Pour appliquer les formules, le plus important est de bien identifier q_1, la quantité de départ, et q_2, la quantité d'arrivée, en lisant attentivement l'énoncé.

a. Le taux d'évolution est $t = \dfrac{7\,530 - 5\,120}{5\,120} = \dfrac{2\,410}{5\,120} \approx +0{,}47 \approx +\mathbf{47}\%$

et le coefficient est $c = \dfrac{7\,530}{5\,120} \approx \mathbf{1{,}47}$.

b. Le taux d'évolution est $t = \dfrac{21 - 35}{35} = \dfrac{-14}{35} = -0{,}4 = -\mathbf{40}\%$

et le coefficient $c = \dfrac{21}{35} \approx \mathbf{0{,}6}$.

c. 5h07 correspond à 307 minutes, et 3h10 à 190 minutes.

Le taux d'évolution est $t = \dfrac{307 - 190}{190} = \dfrac{117}{190} \approx +0{,}62 \approx +\mathbf{62}\%$

et le coefficient est $c = \dfrac{307}{190} \approx \mathbf{1{,}62}$.

3b. Appliquer une évolution

Augmenter q_1 de p % revient à la multiplier par le coefficient $\left(1+\frac{p}{100}\right)$

Diminuer q_1 de p % revient à la multiplier par le coefficient $\left(1-\frac{p}{100}\right)$

Exemple 1 En France, la TVA est de 20%. Un magasin d'équipement de bureau vend une imprimante à 74,50€ hors taxe. Quel est le prix toutes taxes comprises ?

Exemple 2 Julien obtient 15% de réduction sur un vélo électrique valant 458€.
A combien pourra-t-il acheter ce vélo ?

Exemple 3 Une ville comportait 51 120 habitants en 2010, et sa population a augmenté de 7,3% en dix ans. Quelle est sa population maintenant ? Arrondir à l'unité.

Exemple 4 Le prix de vente moyen d'un téléphone était de 313$ en 2017, mais il a augmenté de 11% l'année suivante. Quel est le prix de vente moyen en 2018 ?

Exemple 5 Un costume est habituellement vendu 278€, mais son prix baisse de 35% pendant les soldes.
Quel est le prix soldé ?

Exemple 6 Le nombre d'inscrits à une formation était de 65 dans sa première année, mais ce nombre a ensuite connu une forte augmentation de 140% l'année suivante. Combien y avait-t-il d'inscrits cette année ?

Exemple 1 Le coefficient d'augmentation est : $1+\frac{20}{100}=1+0{,}20=\mathbf{1{,}20}$
On calcule donc $74{,}50\times 1{,}20=\mathbf{89{,}40}$€

Exemple 2 Le coefficient de réduction est : $1-\frac{15}{100}=1-0{,}15=\mathbf{0{,}85}$
On calcule donc $458\times 0{,}85=\mathbf{389{,}30}$€

Exemple 3 Le coefficient d'augmentation est : $1+\frac{7{,}3}{100}=1+0{,}073=\mathbf{1{,}073}$
On calcule donc $51\,120\times 1{,}073\approx\mathbf{54\,851}$ habitants.

Exemple 4 Le coefficient d'augmentation est : $1+\frac{11}{100}=1+0{,}11=\mathbf{1{,}11}$
On calcule donc $313\times 1{,}11=\mathbf{347{,}43}$$

Exemple 5 Le coefficient de réduction est : $1-\frac{35}{100}=1-0{,}35=\mathbf{0{,}65}$
On calcule donc $378\times 0{,}65=\mathbf{245{,}70}$€

Exemple 6 Le coefficient d'augmentation est : $1+\frac{140}{100}=1+1{,}40=\mathbf{2{,}4}$
On calcule donc $65\times 2{,}4=\mathbf{156}$ inscrits.
Un pourcentage d'augmentation peut être supérieur à 100% : cela signifie que la quantité de départ a plus que doublé. Multiplier une quantité par 2 revient à l'augmenter de 100%.

3c. Évolutions successives

On considère que q_2 évolue ensuite en q_3.

$$\begin{tikzcd} q_1 \arrow[r, bend left] & q_2 \arrow[r, bend left] & q_3 \end{tikzcd}$$

Le coefficient multiplicateur global est le produit des deux coefficients.

Exemple 1 Un foyer payait 74€ par mois de chauffage au gaz en 2020. Sa facture a ensuite augmenté de 4% entre 2020 et 2021, puis de 7% entre 2021 et 2022.
a. Quel est le prix en 2022 ?
b. Trouver le coefficient global et le pourcentage d'évolution entre 2020 et 2022.

Exemple 2 Une voiture était initialement vendue 13 000€ neuve. Son prix a baissé de 20% l'année suivante, puis a par la suite augmenté de nouveau de 20%.
a. Quel est le prix final de la voiture ?
b. Quel est le coefficient global ? Et le pourcentage d'évolution ?

Exemple 3 La population d'un village est passée de 4512 habitants en 2000 à 6768 habitants en 2010.
Par la suite, la population a diminué de 12% entre 2010 et 2020.
a. Quelle est la population en 2020 ?
b. Quel est le pourcentage d'évolution entre 2000 et 2020 ?

Exemple 1

a. Le premier coefficient d'augmentation est : $1+\frac{4}{100}=1+0{,}04=\mathbf{1,04}$
et le deuxième est : $1+\frac{7}{100}=1+0{,}07=\mathbf{1,07}$
On calcule donc $74\times 1{,}04\times 1{,}07=82{,}3472\approx \mathbf{82,35}$€
b. Le coefficient global est $1{,}04\times 1{,}07=\mathbf{1,112\,8}$.
Le taux d'évolution est toujours égal au coefficient moins 1.
Le pourcentage d'évolution est donc $1{,}112\,8-1=0{,}112\,8=+\mathbf{11,28}\%$

Exemple 2

a. Le premier coefficient est $1-\frac{20}{100}=0{,}80$ et le deuxième est $1+\frac{20}{100}=1{,}20$.
On calcule donc $13\,000\times 0{,}80\times 1{,}20=\mathbf{12\,480}$€.
b. Le coefficient global est $0{,}80\times 1{,}20=\mathbf{0,96}$.
Le pourcentage d'évolution est donc $0{,}96-1=-0{,}04=-\mathbf{4}\%$
On constate donc que diminuer une quantité d'un pourcentage puis la réaugmenter de ce même pourcentage ne la fait pas revenir à sa valeur initiale.

Exemple 3

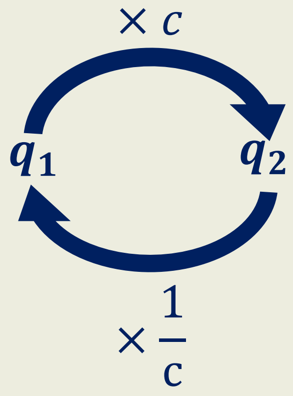
a. En partant de 2010, le coefficient est $1+\frac{12}{100}=1{,}12$.
On calcule donc $6\,768\times 1{,}12=7\,580{,}16\approx \mathbf{7\,580}$ habitants en 2020.
b. On peut réutiliser la formule du taux d'évolution depuis 2000 :

$$t=\frac{7\,580-4\,512}{4\,512}=\frac{3\,068}{4\,512}\approx +0{,}70\approx +\mathbf{70}\%$$

charly-piva.fr

3d. Évolution réciproque

On cherche comment faire
en sorte que q_2 revienne à q_1.



Le coefficient réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur.

Si le coefficient est c, le coefficient réciproque est $\frac{1}{c}$.

Exemple 1

Compléter les phrases suivantes :

a. L'évolution réciproque d'une augmentation de 25% est une diminution de …

b. L'évolution réciproque d'une diminution de 15% est …

c. L'évolution réciproque d'une augmentation de 60% est …

d. L'évolution réciproque d'une diminution de 40% est …

Exemple 2

a. Le prix hors taxes d'un paquet de pâtes est de 2,75€ (le taux de TVA pour ce produit est de 5,5%) .
Déterminer le prix TTC de ce paquet.

b. Le prix TTC d'une télévision est de 780€ (le taux de TVA ici est de 20%).
Déterminer le prix hors taxes de ce téléviseur, ainsi que le montant de la TVA.

Exemple 3

Le prix d'un baril de pétrole est initialement de 41,8$, puis augmente de 17%.

a. Quel est son prix après augmentation ?

b. Après l'augmentation, comment le prix devrait-il évoluer pour revenir à sa valeur initiale ?

Exemple 4

Entre juillet et décembre 2019, le prix d'une action en Bourse a été multiplié par 0,73.

a. Quel est le taux d'évolution de cette action ?

b. Calculer le taux d'évolution que devra subir cette action pour revenir à son niveau de juillet.

Exemple 1

a. Le coefficient d'évolution est 1,25, donc le coefficient réciproque est $\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$

On calcule le taux d'évolution réciproque : $0{,}8 - 1 = -0{,}2 = -20\%$

L'évolution réciproque d'une augmentation de 25% est une **diminution de 20%**.

b. Le coefficient d'évolution est 0,85, le coefficient réciproque est $\frac{1}{0{,}85} \approx 1{,}18$

On calcule le taux d'évolution réciproque : $1{,}18 - 1 \approx +\mathbf{18}\%$

c. Le coefficient d'évolution est 1,60, le coefficient réciproque est $\frac{1}{1{,}60} = 0{,}625$

On calcule le taux d'évolution réciproque : $0{,}625 - 1 = -\mathbf{37{,}5}\%$

d. Le coefficient d'évolution est 0,60, le coefficient réciproque est $\frac{1}{0,60} \approx 1,67$
On calcule le taux d'évolution réciproque : $1,67 - 1 \approx +\mathbf{67}\%$

Exemple 2
a. *Il s'agit ici d'une évolution classique.*
Le coefficient d'évolution est 1,055, donc on calcule $2,75 \times 1,055 \approx \mathbf{2,90}$ € TTC.
b. *Ici, on demande l'évolution réciproque d'une augmentation de 20%.*
Si on ne cherche pas le coefficient réciproque mais juste le prix de départ, on peut juste diviser le prix d'arrivée par le coefficient.
Le prix a été multiplié par 1,20. On calcule donc $780 \div 1,20 = \mathbf{650}$ € HT
Le montant de la TVA est donc $780 - 650 = \mathbf{130}$ €.

Exemple 3
a. Le coefficient d'augmentation est 1,17
On calcule $41,8 \times 1,17 \approx \mathbf{48,91}$ \$ après augmentation.
b. *Ici, on cherche le coefficient réciproque, comme dans l'exemple 1.*
Le coefficient d'évolution est 1,17, le coefficient réciproque est $\frac{1}{1,17} \approx 0,85$
On calcule le taux d'évolution réciproque : $0,85 - 1 \approx -\mathbf{15}\%$
Le prix devrait diminuer d'environ 15% pour revenir à sa valeur initiale.

Exemple 4
a. 0,73 est le coefficient, donc le taux d'évolution est $0,73 - 1 = -\mathbf{27}\%$.
b. Le coefficient d'évolution est 0,73, le coefficient réciproque est $\frac{1}{0,73} \approx 1,37$
On calcule le taux d'évolution réciproque : $1,37 - 1 \approx +\mathbf{37}\%$
L'action devra donc augmenter de 37% pour revenir au niveau de juillet.