Chapitre 6 – Probabilités

1. Expériences et événements

1a. Expérience aléatoire

Définition : • une **expérience aléatoire** est une expérience que l'on peut reproduire autant qu'on veut, dont on connaît tous les résultats possibles, mais dont on ne peut pas prévoir exactement le résultat.
• une **issue** est un résultat possible d'une expérience aléatoire.
• l'ensemble de toutes les issues s'appelle l'**univers**, on le note par la lettre grecque Ω.

Exemples d'expériences aléatoires

1. On lance un dé à six faces. Quelles sont les issues ?
2. On lance une pièce et on regarde de quel côté elle retombe.
Donner l'univers Ω.
3. On fait tourner la roue ci-contre. Quel est l'univers ?

4. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, sans jokers.
Combien y a-t-il d'issues ? En donner quelques-unes.
5. Voici la répartition des élèves dans une classe :
Si on interroge un élève au hasard, quelles sont les issues ?

	Externes	Demi-pensionnaires
Filles	7	11
Garçons	9	6

6. On lance deux dés à six faces : un rouge et un bleu.
Donner quelques issues. Combien y en a-t-il ?
7. On lance de deux dés à six faces et on calcule la somme des résultats. Donner les issues.

8. On dispose d'une urne contenant trois jetons « A », « B » et « C ».
On en tire deux à la suite et on regarde le « mot » formé par ces deux lettres.
Dessiner un arbre représentant la situation et donner les issues.
9. Dans un jeu télévisé, une urne contient sept boules : cinq boules rouges et deux boules vertes. Un candidat doit tirer deux boules d'affilée. Pour chaque boule verte, il gagne 500€. Pour chaque boule rouge, il perd 200€.
Donner l'univers Ω. Joueriez-vous à ce jeu ?

1. *On donne notre réponse sous la forme d'un ensemble, qui est l'univers Ω.*

$$\Omega = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$$

2. $\Omega = \{\mathbf{pile}; \mathbf{face}\}$

3. $\Omega = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{5}\}$.
Notez que cela ne nous dit pas que le 4 apparaît moins souvent que les autres nombres, pour cela il faudra calculer les probabilités.

4. Il existe **52** issues. Par exemple : 7 de cœur, as de carreau…

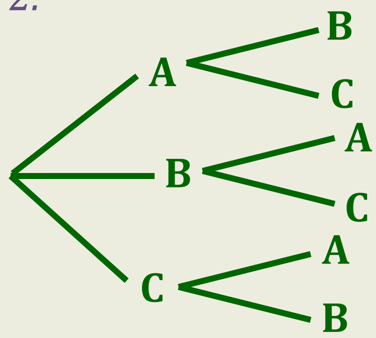
5. Le tableau décompose les élèves en 4 catégories, donc :

$$\Omega = \{\mathbf{fille\ ext.}, \mathbf{fille\ demi\text{–}p.}, \mathbf{garçon\ ext.}, \mathbf{garçon\ demi\text{–}p.}\}$$

6. Pour chaque lancer, on a un nombre sur le dé rouge et un autre sur le dé bleu.
On peut avoir par exemple : « 2 rouge et 5 bleu » ou encore « 3 rouge et 3 bleu ».
Chaque dé a six faces, donc il y a $6 \times 6 = \mathbf{36}$ issues.

7. La somme de 2 dés est comprise entre 2 et 12, donc $\Omega = \{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \dots ; \mathbf{11}; \mathbf{12}\}$.

8. *On dispose d'abord de 3 lettres pour le premier tirage, mais ensuite il n'en reste plus que 2.*



On peut donc former les 6 « mots » suivants : $\Omega = \{\boldsymbol{AB}; \boldsymbol{AB}; \boldsymbol{BA}; \boldsymbol{BC}; \boldsymbol{CA}; \boldsymbol{CB}\}$.

9. On tire deux boules, donc en notant V pour boule verte et R pour une boule rouge $\Omega = \{\mathbf{VV}; \mathbf{RV}; \mathbf{VR}; \mathbf{RR}\}$. Malgré le gain important des boules vertes, le risque est quand même grand de ne pas en tirer, surtout après avoir tiré une première boule verte : il ne reste alors plus qu'une verte et cinq rouges... Il faudra faire des calculs dans la partie suivante de la leçon.

1b. Événements

Un événement est un regroupement d'issues. C'est un sous-ensemble de l'univers. On le note par une lettre, et on peut le décrire par une phrase.

Exemples d'événements

1. On fait tourner la roue ci-contre. Quelles sont les issues des événements suivants ?
A : « *obtenir un nombre pair* ». B : « *obtenir un nombre supérieur à 3* ».

2. On lance deux dés à six faces et on additionne les résultats.
Quel est l'ensemble Ω, et quelles sont les issues des événements suivants ?
A : « *obtenir un nombre pair* » B : « *obtenir un nombre inférieur ou égal à 5* »
C : « *obtenir un multiple de 3* » D : « *obtenir 9* »
(D ne contient qu'une issue, on appelle cela un **événement élémentaire**)

3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, sans jokers.
Donner les issues de l'événement A : « *tirer un 7* ».
Combien d'issues correspondent à B : « *tirer une figure (roi, dame, valet)* » ?
et à C : « *tirer une carte noire*» ?

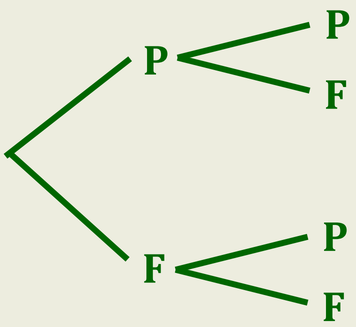
4. On lance deux pièces et on regarde de quels côtés elles retombent.
Réaliser un arbre et donner l'univers.
Quelles sont les issues de A : « *obtenir le même résultat aux deux lancers* » et B : « *obtenir au moins un pile* » ?

1. $A = \{\mathbf{2}; \mathbf{4}\}$ et $B = \{\mathbf{4}; \mathbf{5}\}$.

2. Comme vu précédemment, $\Omega = \{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \dots; \mathbf{11}; \mathbf{12}\}$. Ainsi :
$A = \{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}; \mathbf{8}; \mathbf{10}; \mathbf{12}\}$ $B = \{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}\}$
$C = \{\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{9}; \mathbf{12}\}$ $D = \{\mathbf{9}\}$

3. Il existe quatre cartes 7, donc $A = \{\mathbf{7}\,\diamondsuit, \mathbf{7}\,\heartsuit, \mathbf{7}\,\spadesuit, \mathbf{7}\,\clubsuit\}$
Il existe 12 cartes figures, donc B comporte **12** issues,
et la moitié des cartes, soit 26 cartes, est noire. Donc C comporte **26** issues.

4.



Ainsi, $\Omega = \{\boldsymbol{PP}; \boldsymbol{PF}; \boldsymbol{FP}; \boldsymbol{FF}\}$
De plus, $A = \{\boldsymbol{PP}; \boldsymbol{FF}\}$ et $B = \{\boldsymbol{PP}; \boldsymbol{PF}; \boldsymbol{FP}\}$.

1c. Événement complémentaire

• Le complémentaire d'un événement A, noté $\bar{A}$ (on lit « non-A ») est l'événement contraire de A : il est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

• Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps : ils n'ont aucune issue en commun.

Événements contraires, événements incompatibles

1. On lance un dé à 6 faces. Décrire les complémentaires des événements et donner les issues correspondantes.

A : *« obtenir 5 ou plus ».* B : *« obtenir un multiple de 3 ».* C : *« obtenir 6 ».*

2. Dans la météo, l'événement complémentaire de *« il pleut »* est-il *« il fait beau ? »*

3. On lance un D10 (un dé à 10 faces, numérotées de 1 à 10)

a. Pour chacun de ces événements, décrire son complémentaire et donner ses issues.

A : *« obtenir 7 ou plus ».* B : *« obtenir un multiple de 4 ».* C : *« obtenir un nombre impair ».*

b. A et B sont-ils incompatibles ? Et B et C ?

4. Un sac contient trois jetons, numérotés de 1 à 3. On tire deux jetons, sans remise, et on note le nombre obtenu en écrivant les deux chiffres l'un après l'autre.

a. Réaliser un arbre et donner Ω.

b. Pour chacun de ces événements, décrire son complémentaire et donner ses issues.

A : *« obtenir un nombre impair »* B : *« obtenir un nombre commençant par 3 ».*

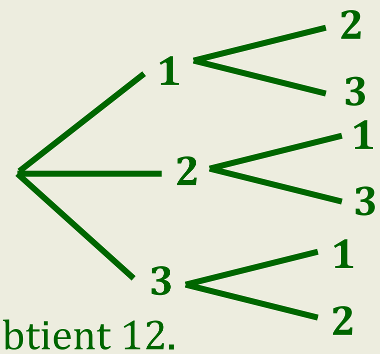
c. A et B sont-ils incompatibles ? **d.** Que peut-on dire de l'événement C : « obtenir 22 » ?

1. Le contraire de A est $\bar{A}$: « obtenir moins de 5 ».Les issues sont $\bar{A} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}\}$.
De même, $\bar{B}$: « ne pas obtenir un multiple de 3 » et $\bar{B} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{5}\}$.
$\bar{C}$: « ne pas obtenir 6 » et $\bar{C} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}\}$.

2. Pas forcément, le contraire est « il ne pleut pas », ce qui n'est pas équivalent à « il fait beau » (il peut neiger, ou le temps peut simplement être couvert…).

3. a. $\bar{A}$: « obtenir **moins de 7** » et $\bar{A} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}\}$.
$\bar{B}$: « **ne pas obtenir** un multiple de 4 » et $\bar{B} = \{\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}; \mathbf{6}; \mathbf{7}; \mathbf{9}; \mathbf{10}\}$.
$\bar{C}$: « **obtenir un nombre pair** » et $\bar{C} = \{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6}; \mathbf{8}; \mathbf{10}\}$.
b. A et B ne sont **pas incompatibles**, en effet, on peut obtenir 8, ce qui satisfait A et B en même temps.
B et C sont **incompatibles** : aucun nombre multiple de 4 n'est impair, donc ces deux événements ne peuvent pas se produire en même temps.

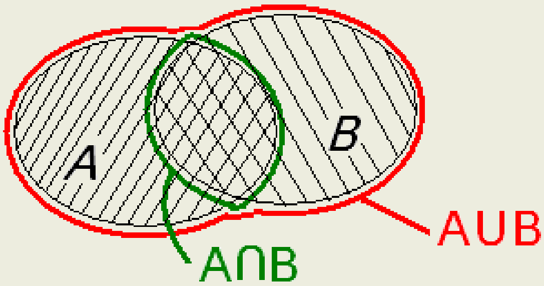
4. a. *On se base sur l'arbre ci-contre : une fois qu'un chiffre est tiré, il ne peut plus être tiré à nouveau.*
$\Omega = \{\mathbf{12}; \mathbf{13}; \mathbf{21}; \mathbf{23}; \mathbf{31}; \mathbf{32}\}$



b. $\bar{A}$: « obtenir **un nombre pair** » et $\bar{A} = \{\mathbf{12}; \mathbf{32}\}$.
$\bar{B}$: « **ne pas obtenir** un nombre commençant par 3»
et $\bar{B} = \{\mathbf{12}; \mathbf{13}; \mathbf{21}; \mathbf{23}\}$.
c. A et B ne sont **pas incompatibles** : ils sont réalisés si on obtient 12.
d. Il s'agit d'un **événement impossible**.

1d. Union et intersection

• L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'événement qui se réalise
si A et B sont réalisés en même temps.



• L'union de A et de B, notée $A \cup B$, est l'événement qui se réalise
si soit A, soit B, soit les deux sont réalisés.

Exemple 1 On lance un D20 (dé à vingt faces). On considère les événements suivants :
A : « *obtenir un multiple de 3* » B : « *obtenir un multiple de 4* » C : « *obtenir 15 ou plus* »
a. Donner les issues qui composent ces événements.
b. En déduire les issues des événements suivants : $A \cap B$; $C \cap \bar{A}$ et $B \cup C$.

Exemple 2 On tire une carte au hasard parmi les figures d'un jeu de cartes (valet, dame, roi).
On considère les événements : V : « *tirer un valet* » R : « *tirer un roi* » P : « *tirer un pique* »
Donner les issues qui composent les événements suivants $V \cap P$; $R \cap \bar{P}$; $R \cup P$ et $\bar{R} \cap P$.

Exemple 3 Dans une classe en 2021, on tire un élève au hasard. On considère trois événements :
F : « *l'élève est une fille* » B : « *l'élève porte un masque bleu* » R : « *l'élève porte un masque rouge* »
a. Parmi ces trois événements, lesquels sont incompatibles ?
b. Décrire par une phrase les événements suivants : $\bar{F}$; $\bar{B}$; $F \cap B$; $\bar{F} \cap \bar{R}$; $F \cup B$

Exemple 1 a. $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$; $B = \{4; 8; 12; 16; 20\}$
et $C = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.
b. A ∩ B *correspond aux issues qui sont à la fois dans* A *et* B*, donc* $\boldsymbol{A \cap B = \{12\}}$.
C ∩ $\bar{\text{A}}$ *correspond aux issues dans* C*, mais pas dans* A. $\boldsymbol{C \cap \bar{A} = \{16; 17; 19; 20\}}$.
B ∪ C *correspond aux issues qui sont dans B ou dans* C*, ou les deux.*
$\boldsymbol{B \cup C = \{4; 8; 12; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}}$.

Exemple 2 $V \cap P = \{$**valet ♠**$\}$
$R \cap \bar{P} = \{$**roi ♡, roi ♢, roi ♣**$\}$ *Ce sont les rois non-piques.*
$R \cup P = \{$**roi ♡, roi ♢, roi ♣, roi ♠, dame ♠, valet ♠**$\}$ *Ce sont les rois, et les autres cartes piques.*
$\bar{R} \cap P = \{$**dame ♠, valet ♠**$\}$ *Ce sont les piques qui ne sont pas des rois.*

Exemple 3 a. Les événements incompatibles sont ***B* et *R*** : un même élève ne peut pas porter à la fois un masque bleu, et un masque rouge.
b. $\bar{F}$: « l'élève n'est **pas une fille** ».
$\bar{B}$: « l'élève ne porte **pas de masque bleu** » *(il ne porte pas forcément de masque rouge).*
$F \cap B$: « l'élève est une **fille portant un masque bleu** ».
$\bar{F} \cap \bar{R}$: « l'élève n'est **pas une fille et ne porte pas de masque rouge** ».
$F \cup B$: « l'élève est **une fille OU porte un masque bleu** » *(cela peut être par exemple une fille avec un masque rouge, ou un garçon avec un masque bleu).*

2. Probabilité d'un événement

2a. Définition

Soit A un événement. Sa probabilité, notée $p(A)$ ou $P(A)$,
est un nombre compris entre 0 et 1.
Plus elle est élevée, plus l'événement a des chances de se réaliser.

- on peut la noter par un nombre, une fraction ou un pourcentage.
- si $p(A) = 0$, A est un événement impossible.
- si $p(A) = 1$, A est un événement certain.

Définition : le cardinal d'un ensemble A, noté card(A), est le nombre d'éléments de cet ensemble.
Propriété : si toutes les issues de l'univers Ω ont la même probabilité, on parle d'équiprobabilité. Dans ce cas :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Calcul de probabilités simples

Exemple 1 On lance un dé à six faces. Soient A : « *obtenir un nombre pair* » et B : « *obtenir 5* »
Donner $p(A)$ et $p(B)$.

Exemple 2 On fait tourner la roue ci-contre.
Soient A : « *obtenir un nombre pair* » et B : « *obtenir un nombre supérieur à 5* »
Donner $p(A)$ et $p(B)$, sous forme de fraction simplifiée, de nombre décimal et de pourcentage.

Exemple 3 On réalise deux pile ou face d'affilée.
a. Représenter la situation sous forme d'arbre.
b. Soient A : « obtenir deux pile » et B : « obtenir au moins un pile ». Donner $p(A)$ et $p(B)$.

Exemple 4 Voici la répartition des élèves dans une classe :
On interroge un élève au hasard.
On appelle F : « *interroger une fille* »
et D : « *interroger un demi-pensionnaire* ».
Donner $p(F)$; $p(D)$; $p(\bar{F})$ et $p(F \cap D)$.

	Externes	**Demi-pensionnaires**
Filles	7	11
Garçons	9	6

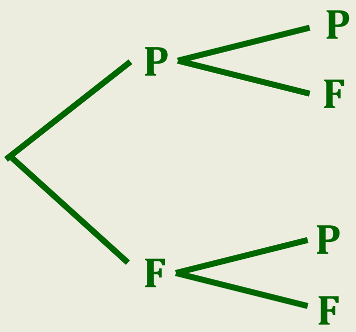
Exemple 5 On lance deux dés à six faces : un rouge et un bleu.
a. Quel est le nombre d'issues ?
b. Quel est la probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit 2 ?
c. Quel est la probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit 7 ?

Exemple 1
L'événement A correspond à trois issues (2, 4 et 6) sur les six issues possibles, donc $(A) = \mathbf{\frac{3}{6}}$. On simplifie : $p(A) = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.
L'événement B ne correspond qu'à une issue sur les six, donc $p(B) = \mathbf{\frac{1}{6}}$.

Exemple 2
La roue est divisée en dix secteurs. Quatre de ces secteurs comportent un nombre pair, donc $\boldsymbol{p(A)} = \frac{4}{10} = \mathbf{\frac{2}{5}} = \mathbf{0,4} = \mathbf{40\%}$.
Aucun secteur ne comporte de nombre supérieur à 5, donc B est un événement impossible et $\boldsymbol{p(B)} = \mathbf{0}$.

Exemple 3

a.



b. Il existe quatre parcours possibles.
L'événement A correspond à un seul parcours, donc $p(A) = \mathbf{\frac{1}{4}}$
L'événement B correspond à trois parcours, donc $p(B) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

Exemple 4
On calcule d'abord le nombre total d'élèves : $7 + 11 + 9 + 6 = \mathbf{33}$

- Il y a 18 filles au total, donc $p(F) = \mathbf{\frac{18}{33}}$
- Il y a 17 demi-pensionnaires, donc $p(D) = \mathbf{\frac{17}{33}}$
- La classe compte 15 garçons, donc $p(\bar{F}) = \mathbf{\frac{15}{33}}$
- Enfin, on compte 11 filles demi-pensionnaires, donc $p(F \cap D) = \mathbf{\frac{11}{33}} = \frac{1}{3}$

Exemple 5
a. Pour chacun des 6 résultats possibles du dé rouge, il existe 6 résultats possibles de dé bleu, donc le nombre d'issues est $6 \times 6 = \mathbf{36}$.
b. Cela correspond à une seule issue (les deux dés font un), donc la probabilité est $\mathbf{\frac{1}{36}}$
c. Cela correspond à 6 issues (un et six ; deux et cinq ; trois et quatre ; quatre et trois ; cinq et deux ; six et un) donc la probabilité est $\mathbf{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$

2b. Loi de probabilité

Connaître la loi d'une expérience aléatoire, c'est connaître toutes les issues avec leur probabilité, qu'on donne sous forme de tableau.

Remarque : la somme des probabilités de toutes les issues est 1.

Loi de probabilité

Exemple 1 Une urne opaque contient dix boules indiscernables au toucher : quatre noires, trois rouges, une bleue et les dernières sont jaunes. On tire une boule de l'urne et on regarde sa couleur.
Modéliser cette expérience aléatoire par une loi de probabilité.

Exemple 2 Une étude menée sur la répartition des groupes sanguins en France a montré que 45 % de la population est du groupe A, 9 % du groupe B, 4 % du groupe AB et le reste est du groupe O. On choisit au hasard une personne en France et on note son groupe sanguin.

Issue	A	B	AB	O
Probabilité				

a. Compléter le tableau pour donner la loi de probabilité de cette expérience.
b. On appelle A l'événement « choisir une personne de groupe A ». Calculer $p(\bar{A})$.

Exemple 3 Quand il commande une pizza à emporter, Jonas a remarqué que le temps d'attente annoncé est 5, 10, 15 ou 20 minutes avec les probabilités ci-contre.

Temps d'attente (en min)	5	10	15	20
Probabilité	0,3	0,2	0,1	?

a. Déterminer la probabilité que le temps d'attente soit 20 minutes.
b. On appelle A l'événement « le temps d'attente est de 10 minutes ou plus ». Calculer $p(A)$ et $p(\bar{A})$.

Exemple 4 On lance un dé pipé, dont les probabilités sont données ci-contre.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

a. Calculer la probabilité d'obtenir 4 en simplifiant.
b. Soit A l'événement « obtenir un nombre pair » et B l'événement « obtenir 5 ».
Calculer $p(A)$; $p(\bar{A})$ et enfin $p(A \cup B)$.

Exemple 1

On calcule la probabilité de chaque couleur : par exemple, la probabilité de tirer une boule noire est $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = 0{,}4$. On calcule les autres probabilités de même, en remarquant que le nombre de boules jaunes est $10 - (4 + 3 + 1) = 10 - 8 = 2$.
On établit le tableau suivant :

Couleur	**Noire**	**Rouge**	**Bleue**	**Jaune**
Probabilité	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,3}$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{0,2}$

Exemple 2

a. Il nous manque juste le pourcentage de personnes du groupe O, mais on calcule $100 - (45 + 9 + 4) = 100 - 58 = \mathbf{42}$.

Issue	A	B	AB	O
Probabilité	**45%**	**9%**	**4%**	**42%**

b. On calcule $p(\bar{A}) = 1 - (0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}42) = 0{,}55$ ou **55%**.

Exemple 3
a. On calcule $1-(0{,}3+0{,}2+0{,}1)=\mathbf{0,4}$, ce qui permet de compléter le tableau.
b. L'événement A correspond à un temps d'attente de 10, 15 ou 20 minutes.
Donc $p(A)=0{,}2+0{,}1+0{,}4=\mathbf{0,7}$
L'événement $\bar{A}$ ne correspond qu'à un temps d'attente de 5 minutes : $p(\bar{A})=\mathbf{0,3}$.

Exemple 4
a. Comme précédemment, la somme de toutes les probabilités étant 1 :
$$1-\left(\frac{5}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)$$
$$=1-\frac{5}{24}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$$
On met toutes ces fractions au même dénominateur.
$$=\frac{24}{24}-\frac{5}{24}-\frac{8}{24}-\frac{4}{24}-\frac{4}{24}-\frac{2}{24}$$
$=\mathbf{\frac{1}{24}}$, cette fraction étant déjà simplifiée.
b. • Les nombres pairs sont 2, 4 et 6. Ainsi :
$$p(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{8}{24}+\frac{1}{24}+\frac{2}{24}=\mathbf{\frac{11}{24}}$$
• De même, les nombres impairs étant 1, 3 et 5 :
$$p(\bar{A})=\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}+\frac{4}{24}+\frac{4}{24}=\mathbf{\frac{13}{24}}$$
• Pour réaliser l'événement $A\cup B$, il faut obtenir 2, 4, 5 ou 6. Donc :
$$p(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{8}{24}+\frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{4}{24}=\mathbf{\frac{15}{24}}$$

3. Opérations sur les probabilités

3a. Complémentaire, union, intersection

Soient A et B deux événements.

• $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

• $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

ou, de façon équivalente, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple 1 On considère A et B deux événements, tels que $p(A) = \frac{11}{20}$, $p(B) = \frac{2}{5}$ et $p(A \cap B) = \frac{3}{10}$
Calculer $p(\bar{A})$ et $p(A \cup B)$.

Exemple 2 On considère A et B, deux événements incompatibles, tels que $p(A) = 0{,}4$ et $p(B) = 0{,}22$.
Calculer $p(\bar{A})$, $p(\bar{B})$ et $p(A \cup B)$.

Exemple 3 On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, sans jokers. Soit T l'événement « *la carte est un trèfle* » et F :« *la carte est une figure (roi, dame ou valet)* ».
a. Calculer $p(T)$; $p(F)$ et $p(\bar{F})$. **b.** Décrire $T \cap F$ par une phrase, puis calculer $p(T \cap F)$.
c. Faire de même avec $p(T \cup F)$ en utilisant le résultat obtenu en **b**.

Exemple 4 Dans une usine, on produit en série 10 000 pièces par jour. Ces pièces passent un contrôle qualité pour éliminer une partie des pièces défectueuses. Le gérant décide de réaliser une étude complète et minutieuse de la production du jour. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Pièces conformes	Pièces défectueuses	Total
Pièces acceptées au contrôle qualité	8 280	60	8 340
Pièces rejetées au contrôle qualité	720	940	1 660
Total	9 000	1 000	10 000

On tire une pièce de la production au hasard et on note :
• A l'événement : « La pièce tirée est acceptée » • C l'événement : « La pièce tirée est conforme. »
Les probabilités seront toutes données sous forme de nombre décimal.
1. Calculer la probabilité de A puis de $\bar{A}$.
2. Pour chaque événement, les définir par une phrase puis calculer leur probabilité.
a. $A \cap C$ **b.** $A \cup C$ **c.** $C \cap \bar{A}$

Exemple 1

• D'après la première formule, $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{20}{20} - \frac{11}{20} = \mathbf{\frac{9}{20}}$

• On applique l'autre formule pour calculer $p(A \cup B)$

$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$= \frac{11}{20} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

$= \frac{11}{20} + \frac{8}{20} - \frac{6}{20}$

$= \mathbf{\frac{13}{20}}$

Exemple 2

• $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}4 = \mathbf{0{,}6}$

• $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}22 = \mathbf{0{,}78}$

• L'énoncé dit que A et B sont incompatibles, ce qui signifie que $p(A \cap B) = 0$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}22 - 0 = \mathbf{0{,}62}$

Exemple 3

a. • Un quart des cartes sont des trèfles, donc $p(T) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

• Le jeu de cartes comprend 12 figures, donc $p(F) = \frac{12}{52} = \mathbf{\frac{3}{13}}$

• On applique la formule : $p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{13}{13} - \frac{3}{13} = \mathbf{\frac{10}{13}}$

b. $T \cap F$ correspond à « **la carte est une figure ET un trèfle** ».

Cela correspond à trois cartes (valet, dame et roi de trèfle), donc $p(T \cap F) = \mathbf{\frac{3}{52}}$

c. $T \cup F$ correspond à « **la carte est une figure OU un trèfle** ».

D'après la formule :

$$\begin{aligned} p(T \cup F) &= p(T) + p(F) - p(T \cap F) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{13} - \frac{3}{52} \\ &= \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} \\ &= \frac{22}{52} \\ &= \mathbf{\frac{11}{26}} \end{aligned}$$

Exemple 4

1. On compte 8 340 pièces acceptées sur les 10 000, donc $p(A) = \frac{8\,340}{10\,000} = \mathbf{0{,}834}$

Ainsi, $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}834 = \mathbf{0{,}166}$

2a. $A \cap C$ correspond à « **la pièce est acceptée ET conforme** ».

Dans le tableau, cela correspond à 8 280 pièces. $p(A \cap C) = \frac{8\,280}{10\,000} = \mathbf{0{,}828}$

2b. $A \cup C$ correspond à « **la pièce est acceptée OU conforme** ».

On applique la formule. $p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$.

Il nous faut d'abord calculer $p(C) = \frac{9\,000}{10\,000} = 0{,}9$

Ainsi, $p(A \cup C) = 0{,}834 + 0{,}9 - 0{,}828 = \mathbf{0{,}906}$

2c. $C \cap \bar{A}$ correspond à « **la pièce est conforme ET n'est PAS acceptée** ».

Dans le tableau, cela correspond à 720pièces. $p(C \cap \bar{A}) = \frac{720}{10\,000} = \mathbf{0{,}072}$

3b. Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $p_B(A)$, la probabilité que A se réalise si on suppose que B est réalisé. On a :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$

Par produit en croix, on trouve $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

Attention : ne pas confondre $p_B(A)$ et $p(A \cap B)$.
- $p_B(A)$ est la probabilité que A soit réalisé, **si on suppose que B est réalisé.**
- $p(A \cap B)$ est la probabilité que **A et B soit réalisés en même temps**, sans condition préalable.

Il faut bien lire les énoncés et la tournure des phrases pour comprendre de quelle probabilité il s'agit.

Exemple 1 On tire au sort un élève d'un lycée dont les effectif sont donnés ci-contre et on considère les événements :
- C : « l'élève mange à la cantine »
- S : « l'élève est en Seconde » • T : « l'élève est en Terminale »

On donnera les probabilités en pourcentage arrondi à l'unité.

	Cantine	Extérieur	**Total**
Seconde	237	122	359
Première	208	133	341
Terminale	206	148	354
Total	651	403	1 054

a. Décrire l'événement $C \cap S$ puis calculer sa probabilité.
b. À quoi correspondent les probabilités $p_S(C)$ et $p_C(S)$? Les calculer.
c. Calculer $p_T(C)$. La probabilité de tirer un élève mangeant à la cantine est-elle plus élevée en le tirant parmi les Terminale plutôt que parmi les Seconde ?

Exemple 2 Une association artistique propose de peinture à l'huile et de l'aquarelle. 60 % des membres sont inscrits au cours de peinture à l'huile, 35 % au cours d'aquarelle et 7 % aux deux. On interroge un membre au hasard.
On note H l'événement : « Le membre interrogé pratique la peinture à l'huile » et A l'événement : « Le membre interrogé pratique l'aquarelle ».

	A	$\overline{A}$	total
H			60
$\overline{H}$			
total			100

a. Compléter le tableau des fréquences. **b.** Donner $p(A)$; $p(A \cap H)$ et $p(A \cap \overline{H})$ en pourcentage.
c. Dans cette question, on tire un membre au hasard parmi ceux qui pratiquent la peinture à l'huile. Exprimer la probabilité que ce membre pratique aussi l'aquarelle et la calculer en arrondissant au centième.
d. Calculer $p_{\overline{H}}(A)$. À quoi correspond la probabilité calculée ?

Exemple 1

a. L'événement $C \cap S$ est : « l'élève tiré est **en Seconde et mange à la cantine** ».
$p(C \cap S) = \frac{237}{1\,054} \approx$ **22%**

b. • $p_S(C)$ est la probabilité qu'un élève **tiré uniquement parmi les Seconde, mange à la cantine**. $p_S(C) = \frac{237}{359} \approx$ **66%**
• $p_C(S)$ est la probabilité qu'un élève **tiré parmi ceux qui mangent à la cantine soit en Seconde**. $p_C(S) = \frac{237}{651} \approx$ **36%**

c. On calcule $p_T(C) = \frac{206}{354} \approx$ **58%** $< 66\%$. La probabilité de tirer un élève mangeant à la cantine est, au contraire, **plus faible parmi les Terminale**.

Exemple 2

a.

	A	$\bar{A}$	total
H	**7**	**53**	60
$\bar{H}$	**28**	**12**	**40**
total	**35**	**65**	100

b. $p(A) = \frac{35}{100} = \mathbf{35\%}$; $p(A \cap H) = \frac{7}{100} = \mathbf{7\%}$ et $p(A \cap \bar{H}) = \frac{28}{100} = \mathbf{28\%}$.

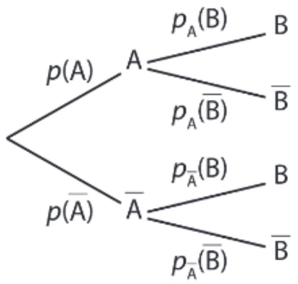
c. $p_H(A) = \frac{7}{60} \approx \mathbf{12\%}$

d. $p_{\bar{H}}(A) = \frac{28}{40} \approx \mathbf{70\%}$. Il s'agit de la **probabilité qu'un membre qui ne pratique pas la peinture à l'huile, pratique l'aquarelle**.

3c. Arbres de probabilité

On peut représenter une expérience par un arbre, notamment dans le cas où plusieurs tirages sont effectués. Pour trouver la probabilité d'un « parcours d'arbre », on multiplie les probabilités de ses branches.

Remarque : dans un arbre pondéré,
les probabilités du « premier niveau » sont **sans conditions**,
les probabilités inscrites ensuite sont des **probabilités conditionnelles**.



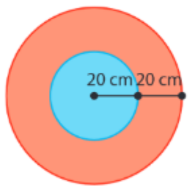
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Les probabilités des événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ correspondent à un « parcours d'arbre ». Elles sont obtenues en **multipliant entre elles** les probabilités écrites **sur les branches qui « mènent » à l'événement**.

Exemple 1 Le bus que Laure doit emprunter pour se rendre au lycée doit passer par deux feux.
Chacun de ces feux reste : • 36 secondes au vert ; • 3 secondes à l'orange ; • 21 secondes au rouge.
a. Représenter la situation par un arbre pondéré. On utilisera des nombres décimaux.
b. Quelle est la probabilité que le bus rencontre 2 feux verts ?

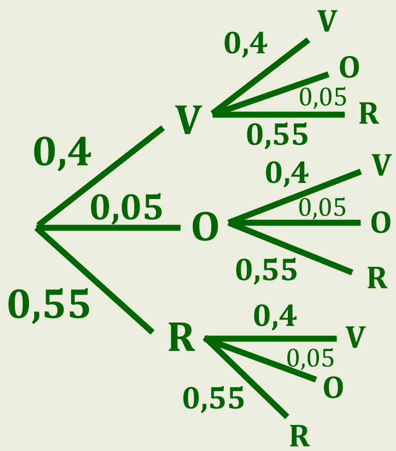
Exemple 2 On souhaite repeindre un mur avec une couleur aléatoire. Pour cela, on dispose de 10 pots de peinture : 7 pots rouges et 3 pots jaunes. On prend un premier pot au hasard que l'on vide dans un seau, puis on prend un deuxième pot au hasard parmi ceux restants que l'on vide dans le même seau. On mélange ensuite le tout.
On s'intéresse à la couleur finale de la peinture. Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

Exemple 3 Mona lance une fléchette sur la cible ci-contre.
On suppose qu'elle a deux chances sur trois de l'atteindre.
Proposer une loi de probabilité qui modéliserait cette expérience aléatoire.



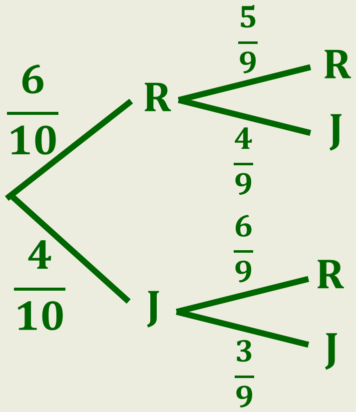
Exemple 1

a. La probabilité de rencontrer un feu vert est : $\frac{24}{60} = 0{,}4$, celle de rencontrer un feu orange est $\frac{3}{60} = 0{,}05$ et celle de rencontrer un feu rouge est : $\frac{33}{60} = 0{,}55$
On écrit toutes ces probabilités dans un arbre.



b. On multiplie les probabilités des deux branches : $0{,}4 \times 0{,}4 = \mathbf{0{,}16}$

Exemple 2 *Ici, la probabilité n'est pas identique à chaque tirage.*
Par exemple, la probabilité que le premier pot soit rouge est $\frac{6}{10}$*.*
Mais si le premier pot est rouge, il ne reste que 5 pots rouges sur 9 pots au total. La probabilité que le deuxième pot soit rouge aussi est donc $\frac{5}{9}$*.*
On prend cela en compte au moment de réaliser l'arbre.



La probabilité d'obtenir la couleur rouge est $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

La probabilité d'obtenir la couleur jaune est $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \mathbf{\frac{2}{15}}$

On peut en déduire la probabilité d'obtenir la couleur orange :

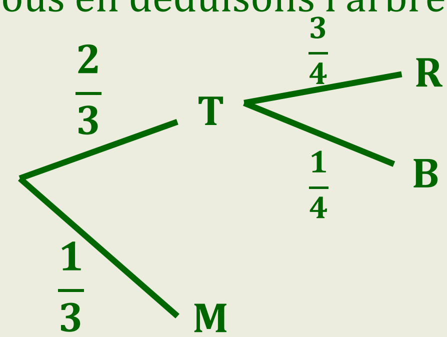
$$1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{15}{15} - \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \mathbf{\frac{8}{15}}$$

Couleur	Rouge	Orange	Jaune
Probabilité	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{2}{15}}$	$\mathbf{\frac{8}{15}}$

Exemple 3 *On suppose que la probabilité de toucher la partie rouge ou la partie bleue ne dépend que de l'aire de ces parties, que nous allons donc calculer.*

La cible a un rayon de 40 cm, l'aire de la cible est donc $\pi \times 40^2 = 1\,600\pi$.
L'aire de la partie bleue est $\pi \times 20^2 = 400\pi$.
Si la cible est touchée, la probabilité que ce soit sur la partie bleue est donc de $\frac{400\pi}{1\,600\pi} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ et ainsi la probabilité que ce soit la partie rouge est $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Nous en déduisons l'arbre complet :



et la loi de probabilité :

Résultat	Manqué	Rouge	Bleue
Probabilité	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{6}}$