

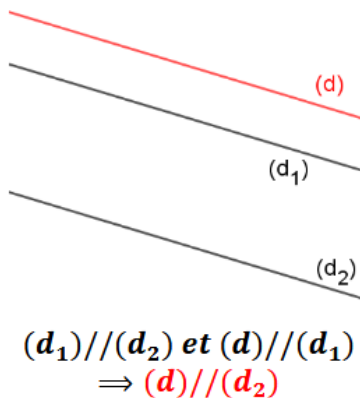
Chapitre 4 – Géométrie et repérage

1. Géométrie sans repère

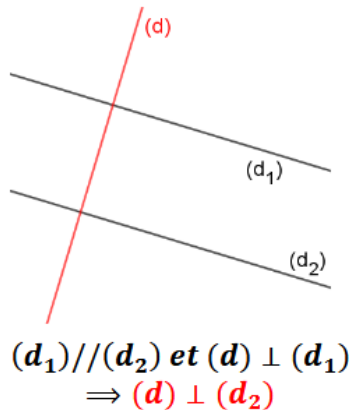
1a. Rappels

Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires

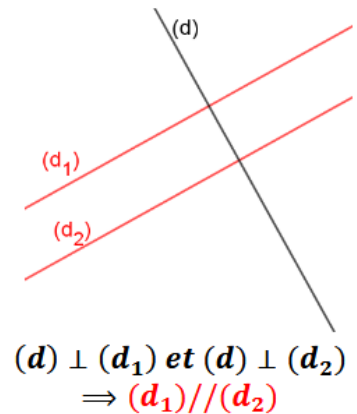
Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une de ces droites est parallèle à l'autre.



Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles.



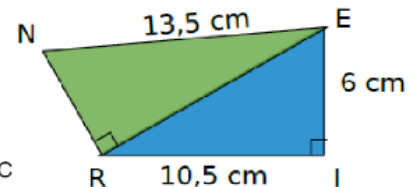
Inégalité triangulaire Soit ABC un triangle. Alors $AC \leq AB + BC$.

L'égalité $AC = AB + BC$ n'a lieu que si $B \in [AC]$, autrement dit ABC est un triangle aplati.

Théorème de Pythagore Soit ABC un triangle.

ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

Dans ce cas, le côté BC est appelé hypoténuse du triangle. C'est le côté le plus long.



Exemple Dans la figure ci-contre, démontrer que $NR = 6 \text{ cm}$.

Le triangle ERI est rectangle en I . On applique le théorème de Pythagore :

$$ER^2 = IE^2 + TR^2 = 6^2 + 10,5^2 = 36 + 110,25 = 146,25$$

Ainsi, $ER = \sqrt{146,25}$, nous n'avons pas besoin de l'arrondi.

Ensuite, dans le triangle NRE rectangle en R :

$$NE^2 = ER^2 + NR^2 \text{ donc}$$

$$NR^2 = NE^2 - ER^2 = 13,5^2 - \sqrt{146,25}^2 = 182,25 - 146,25 = 36$$

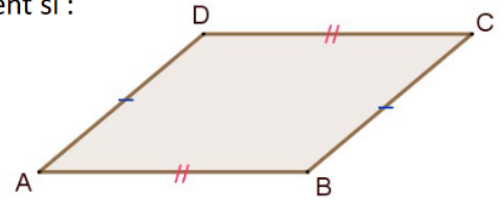
$$\text{Ainsi, } NR = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$$

1b. Parallélogrammes

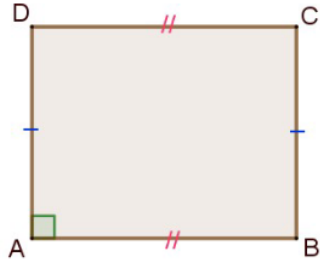
Définition : un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.

On peut montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si :

- ses côtés opposés sont parallèles,
- ses côtés opposés sont de même longueur,
- deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur,
- **ses diagonales se coupent en leur milieu.**



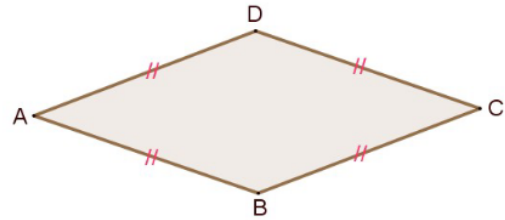
Définition : un **rectangle** est un quadrilatère qui a tous ses angles droits.



Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si :

- c'est un **parallélogramme** avec **un angle droit**,
- c'est un **parallélogramme** avec des **diagonales de même longueur**.

Définition : un **losange** est un quadrilatère qui a tous ses côtés égaux.



Un quadrilatère est un losange si et seulement si :

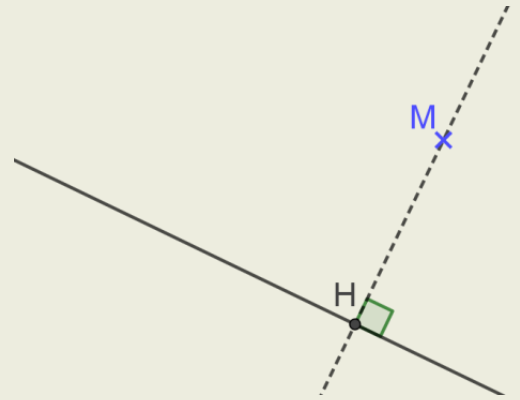
- c'est un **parallélogramme** avec **des diagonales perpendiculaires**,
- c'est un **parallélogramme** avec **deux côtés consécutifs égaux**.

Définition : un **carré** est un quadrilatère qui est **à la fois un rectangle et un losange**.

Ainsi, pour montrer qu'un quadrilatère est un carré, il faut montrer que c'est à la fois un rectangle et un losange.

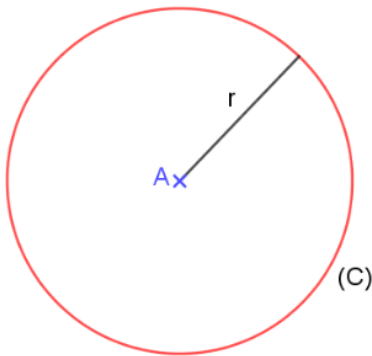
1c. Distance d'un point à une droite

Définition : Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point H , intersection de la droite (d) et de sa perpendiculaire passant par M .



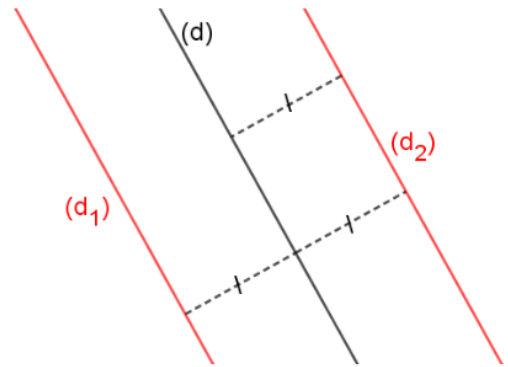
Définition : Dans la figure précédente, on appelle **distance du point M à la droite (d)** , la distance MH .

L'ensemble des points situés à une **même distance** d'un point est un **cercle**.



Exemple : l'ensemble des points situés à une distance r du point A est le cercle de centre A et de rayon r .

L'ensemble des points situés à une **même distance** d'une droite est formé de **deux droites parallèles**.

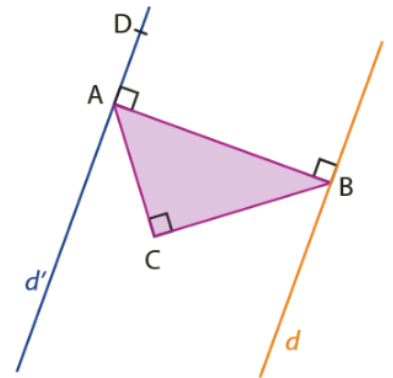


Exemple : l'ensemble des points situés à une distance x de la droite (d) est formé des droites (d_1) et (d_2) .

Exemple On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On trace deux droites d et d' perpendiculaires à $[AB]$ et on place un point D sur la droite d' .

En justifiant, Déterminer les distances :

- a. du point A à la droite (BC) .
- b. du point B à la droite (AC) .
- c. du point D à la droite d .



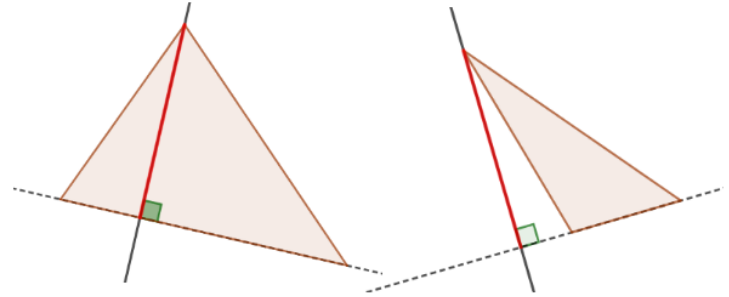
- a. Le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) est le point C . La distance du point A à la droite (BC) est donc la distance AC , soit **3 cm**.
- b. Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est le point C . La distance du point B à la droite (AC) est donc la distance BC , soit **4 cm**.
- c. Le segment $[AB]$ étant perpendiculaire à d et d' , qui sont parallèles, la distance du point D à la droite d correspond donc à la distance AB , soit **5 cm**.

1d. Hauteur, aire d'un triangle

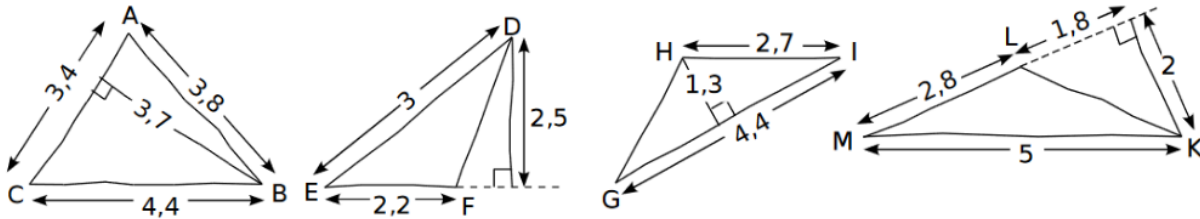
Définition : Soit un triangle ABC . La **hauteur** issue de A (ou la hauteur relative au côté $[BC]$) est la **droite reliant A à H , le projeté orthogonal de A sur la droite (BC)** .

On appelle aussi hauteur la **longueur AH** , c'est-à-dire la distance de A à (BC) .

Propriété : $A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$



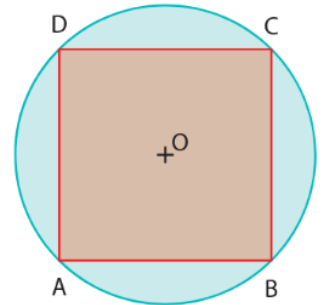
Exemple 1 Calculer l'aire des triangles ci-dessous.



Exemple 2 Dans un triangle ABC , on a : $AB = 9$ m, $BC = 12$ m et $AC = 15$ m. Montrer que ABC est un triangle rectangle puis calculer son aire.

Exemple 3 On considère un carré $ABCD$ de centre O et de côté 4 cm, et un disque de centre O passant par les quatre sommets du carré.

- Calculer l'aire du carré.
- Calculer le rayon, puis l'aire du disque.
- En déduire l'aire comprise entre le disque et le carré.



$$\begin{aligned} \text{Exemple 1 } \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{3,4 \times 3,7}{2} = 6,29 & \mathcal{A}_{DEF} &= \frac{2,2 \times 2,5}{2} = 2,75 \\ \mathcal{A}_{HGI} &= \frac{1,3 \times 4,4}{2} = 2,86 & \mathcal{A}_{LMK} &= \frac{2,8 \times 2}{2} = 2,8 \end{aligned}$$

Exemple 2

Calculons : $AC^2 = 15^2 = 225$, et $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Le triangle ABC est donc rectangle en B d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Ses côtés de l'angle droit $[AB]$ et $[BC]$ forment donc une base et une hauteur.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{9 \times 12}{2} = 54 \text{ m}^2$$

Exemple 3 a. $\mathcal{A}_{\text{carré}} = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$

b. Le diamètre du cercle correspond à la longueur de la diagonale $[BD]$. Pour la trouver, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle BAD rectangle en A : $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$. Ainsi $BD = \sqrt{32}$ et le cercle a pour rayon $r = \frac{\sqrt{32}}{2} \text{ cm}$.

$$\text{Ainsi } \mathcal{A}_{\text{disque}} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{32}{4} = 8\pi \text{ cm}^2$$

c. L'aire recherchée est donc égale à $8\pi - 16 \text{ cm}^2$, soit environ $9,13 \text{ cm}^2$.

2. Repères

2a. Définition

À partir de trois points O , I et J non alignés du plan, on forme le repère noté $(O; I; J)$. O est appelé l'origine du repère, (OI) est l'axe des abscisses, (OJ) est l'axe des ordonnées.

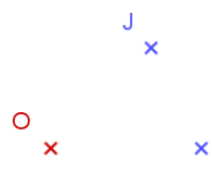
Exemple Dans chaque cas, tracer les axes du repère $(O; I; J)$ et les graduer.



Repère **orthonormé**

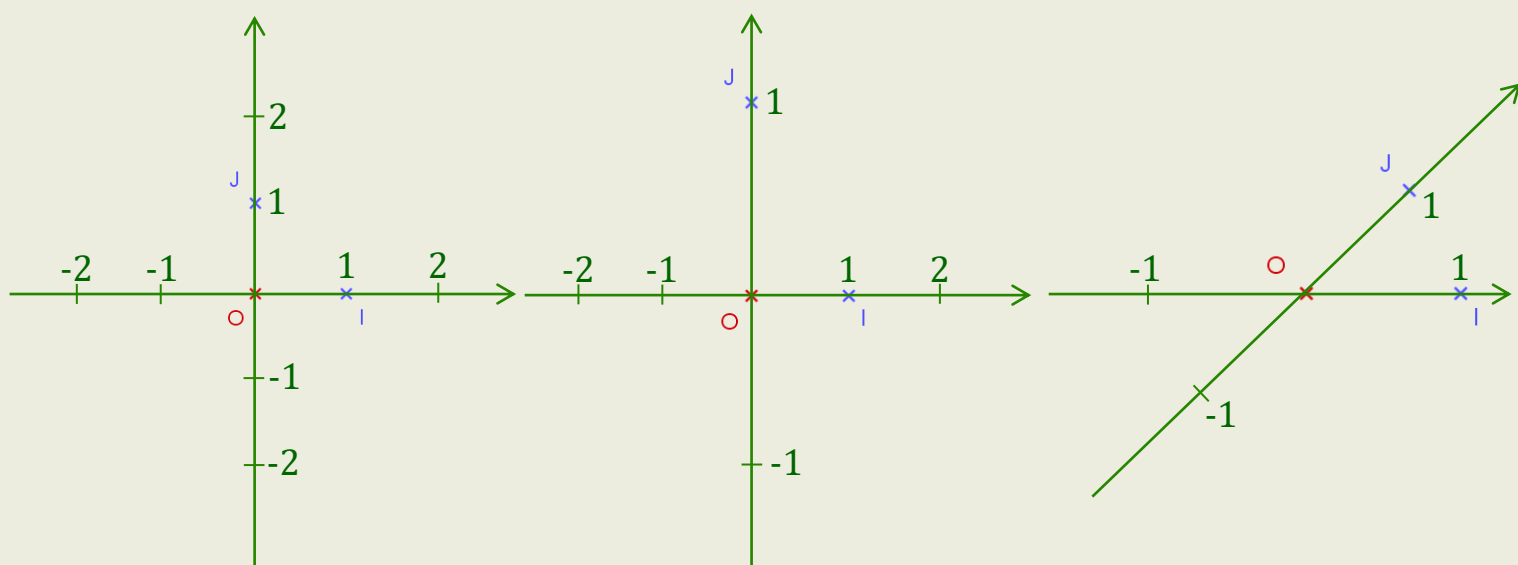


Repère **orthogonal**



Repère **quelconque**

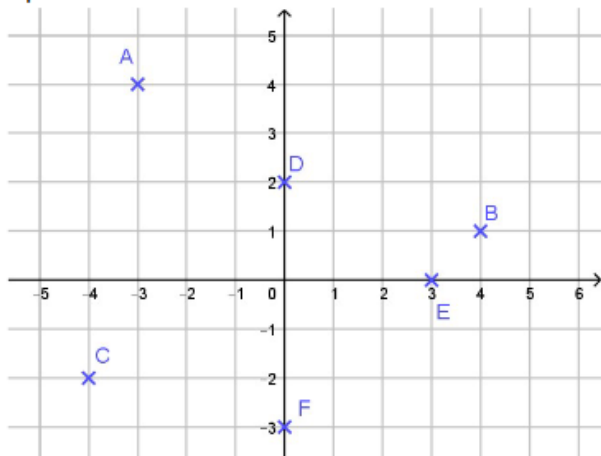
Il faut bien comprendre que c'est la position des points O , I et J qui détermine la direction et la « taille » des graduations du repère.



2b. Coordonnées

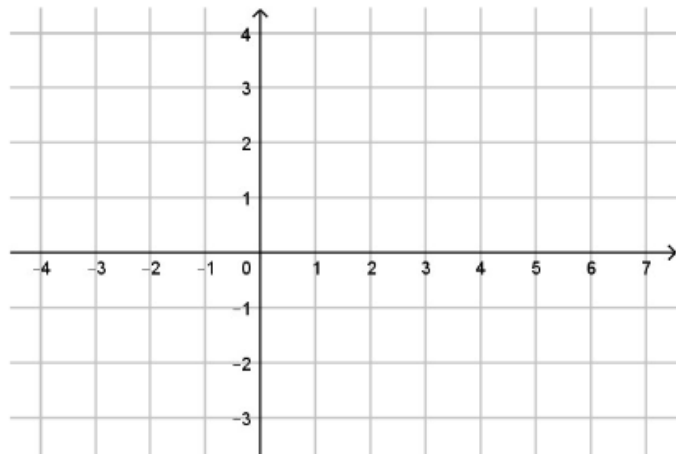
Dans le plan muni d'un repère, chaque point M est repéré par ses **coordonnées** : son **abscisse x** et son **ordonnée y** . On note $M(x; y)$.

Exemple 1 Dans le repère, écrire les coordonnées des points placés.



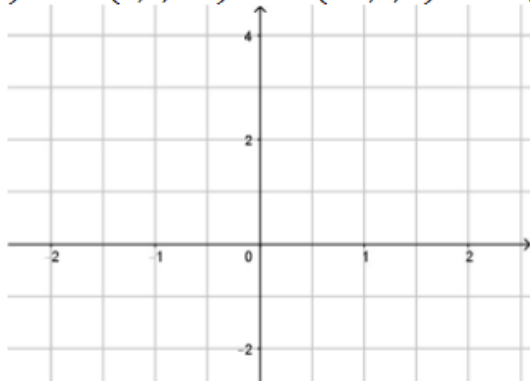
Exemple 2 Dans le repère ci-dessous, placer les points :

$A(3; 2)$ $B(1; 4)$ $C(6; -3)$ $D(-3; 3)$
 $E(0; 2)$ $F(-3; 0)$ $G(1; -2)$ $H(0; -1)$



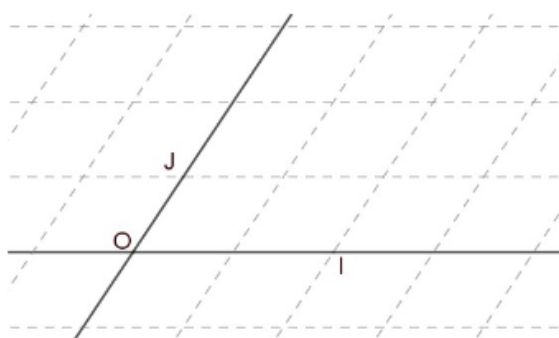
Exemple 3 Dans le repère ci-dessous, placer les points :

$A(1; 4)$ $B(0,5; -2)$ $C(-1,5; 2)$ $D(2; 1)$



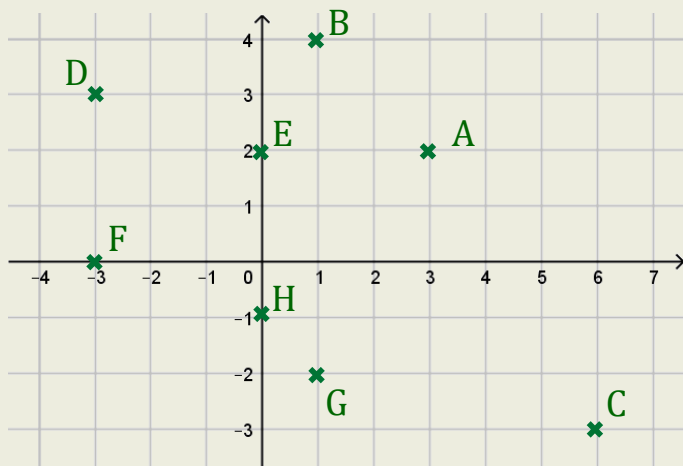
Exemple 4 Dans le repère ci-dessous, placer les points :

$A(1; 1)$ $B(0,5; 2)$ $C(-0,5; 1)$ $D(1,5; -1)$

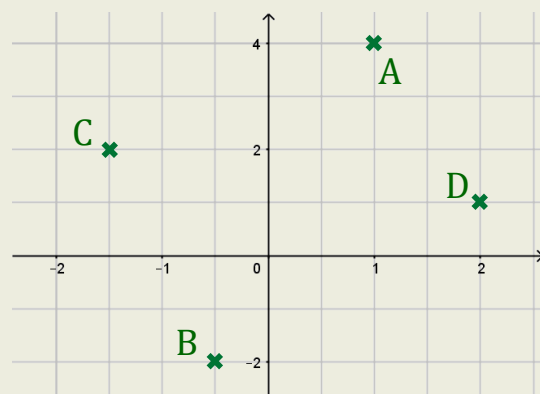


Exemple 1 $A(-3; 4)$; $B(4; 1)$; $C(-4; -2)$; $D(0; 2)$; $E(3; 0)$ et $F(0; -3)$.

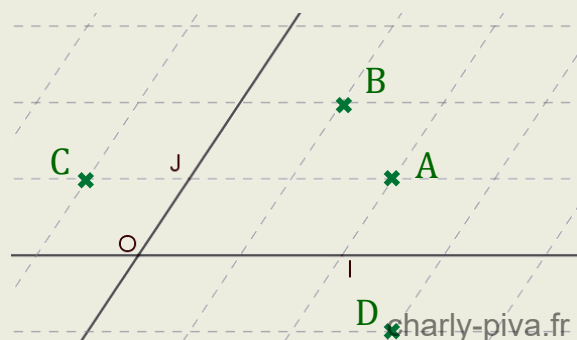
Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4



3. Milieu et distance

3a. Coordonnées du milieu

Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

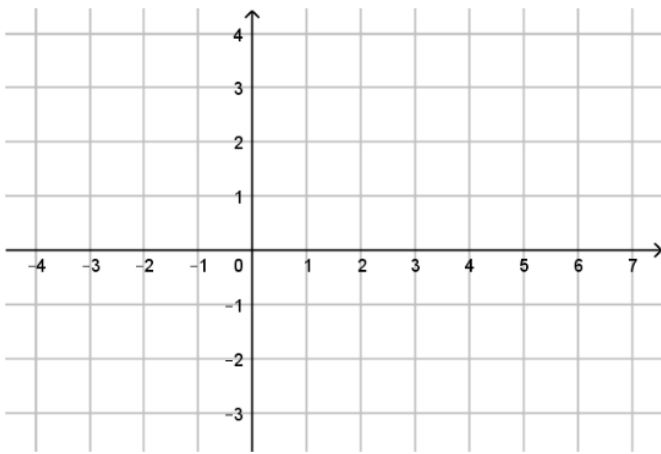
Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

c'est-à-dire la moyenne des coordonnées de A et de B .

Exemple 1

a. Placer les points $A(-1; -2)$ et $B(5; 3)$.



b. Tracer $[AB]$ puis placer M , son milieu.

c. Retrouver les coordonnées de M par le calcul.

Exemple 2

On considère les points $A(1; -3)$, $B(4; 1)$, $C(-3; 3)$ et $D(-1; 2)$.

Déterminer par le calcul les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments $[AC]$ et $[BD]$.

Exemple 3

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$ et $C(a; 5)$

Calculer les coordonnées des milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

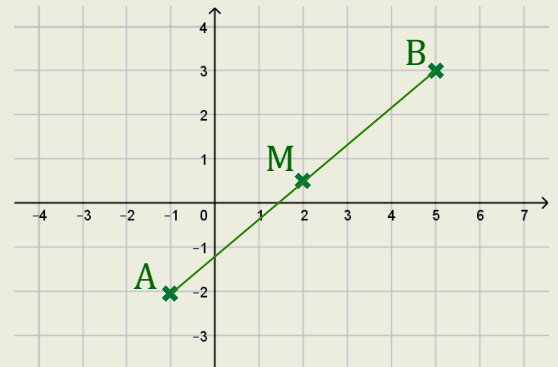
Exemple 1

c. D'après la formule, M a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ soit } M\left(\frac{-1 + 5}{2}; \frac{-2 + 3}{2}\right)$$

et ainsi $M(2; 0,5)$.

On retrouve les coordonnées du point placé.



Exemple 2

$$I\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1 + (-3)}{2}; \frac{-3 + 3}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}; \frac{0}{2}\right) = (-1; 0)$$

$$J\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{4 + (-1)}{2}; \frac{1 + 2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = (1,5; 1,5)$$

Exemple 3 On appelle les deux milieux à déterminer I et J .

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 1}{2}; \frac{1 + 3}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}; \frac{4}{2}\right) = (-0,5; 2)$$

$$J\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-2 + a}{2}; \frac{1 + 5}{2}\right) = \left(\frac{-2 + a}{2}; \frac{6}{2}\right) = \left(-1 + \frac{a}{2}; 3\right)$$

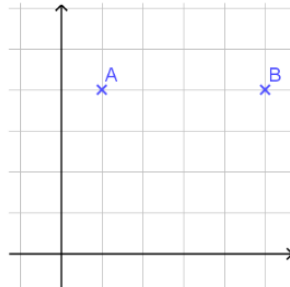
3b. Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La distance AB est donnée par la formule :

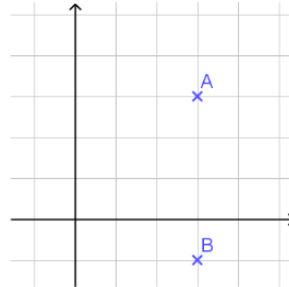
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration :

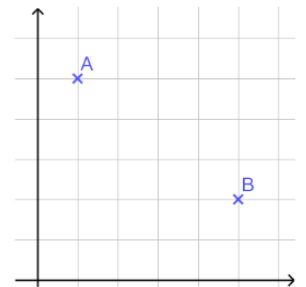
Supposons qu'on ait placés deux points A et B dans un repère orthonormé.



Cas n°1



Cas n°2



Cas général

Cas n°1 : si les deux points ont la même ordonnée, alors la distance AB est aussi donnée par la formule $|x_B - x_A|$.

Or $y_B = y_A$, donc $y_B - y_A = 0$. On trouve donc que la formule

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$$

correspond bien à la distance AB .

Cas n°2 : si les deux points ont la même abscisse, alors la distance AB est aussi donnée par la formule $|y_B - y_A|$. On applique le même raisonnement que pour le cas n°1.

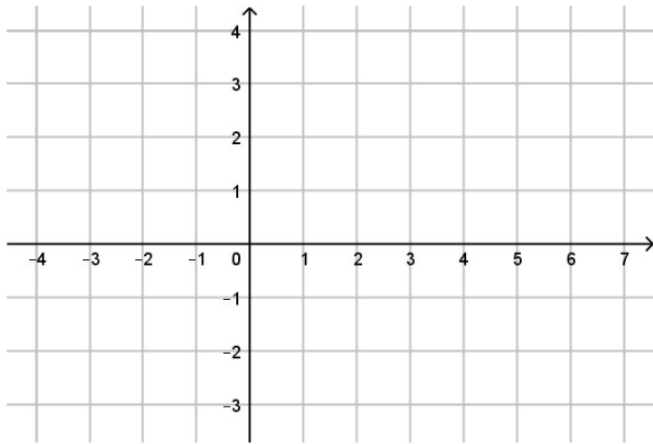
Cas n°3 : on place le point M de coordonnées $(x_B; y_A)$.

Dans le triangle AMB qui est alors rectangle en M , d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AM^2 + BM^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Ainsi, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple 1

Placer les points $C(0; -2)$ et $D(5; 1)$,
puis déterminer par le calcul la longueur CD .
Donner la valeur exacte, puis un arrondi à 10^{-2} .



Exemple 2

On considère les points $A(1; 3)$, $B(-1; 0)$ et $C(7; -1)$

- Calculer les longueurs AB , AC et BC .
- Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exemple 3

On considère les points $A(0; -1)$, $B(-1; -3)$ et $C(2; 3)$

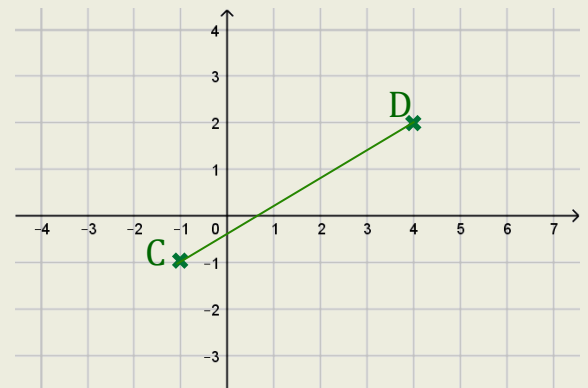
- Calculer les longueurs AB , AC et BC .
- Les points A , B et C sont-ils alignés ?

Exemple 1 On applique la formule :

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$CD = \sqrt{(5 - 0)^2 + (1 - (-2))^2}$$

$$CD = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \approx 5,83$$



Exemple 2

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(7 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

On a donc $BC^2 = 65$ alors que $AB^2 + AC^2 = 13 + 52 = 65$.

Le triangle ABC est donc **rectangle en A**.

Exemple 3

$$\text{a. } AB = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-3 - (-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

b. Les points A , B et C sont alignés si et seulement si $BC = AB + AC$.

Sans les carrés : il ne s'agit pas du théorème de Pythagore, mais de l'inégalité triangulaire vue en partie 1a.

$$\text{Or } BC = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{et } AB + AC = \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

On retrouve le même résultat, donc $BC = AB + AC$.

Les points A , B et C sont alignés.