Chapitre 3 – Suites numériques

1. Suites explicites

1a. Définition

Une suite est une fonction dont la variable est un entier naturel.

Exemple 1 On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u(n) = 11 - 4n$.
Calculer $u(0)$, $u(1)$ et $u(2)$.
Puis, écrire les dix premiers termes de la suite.

Exemple 2 On considère la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v(n) = n^2 + n$.
Calculer $v(0)$, $v(3)$, $v(7)$ et $v(10)$.

Exemple 1
$u(0) = 11 - 4 \times 0 = \mathbf{11}$; $u(0) = 11 - 4 \times 1 = \mathbf{7}$ et $u(2) = 11 - 4 \times 2 = \mathbf{3}$.
Les dix premiers termes sont : 11 ; 7 ; 3 ; -1 ; -5 ; -9 ; -13 ; -17 ; -21 et -25.

Exemple 2
$v(0) = 0^2 + 0 = \mathbf{0}$; $v(3) = 3^2 + 3 = \mathbf{12}$; $v(7) = 7^2 + 7 = \mathbf{56}$
et $v(10) = 10^2 + 10 = \mathbf{110}$.

1b. Indices

Le premier terme de la suite u est généralement $u(0)$.
Dans ce cas par exemple, $u(7)$ est le 8ème terme de la suite.

Une suite u peut se noter (u_n).
$u(n)$ s'appelle le terme d'indice (ou de rang) n et se note u_n.

Exemple 1 On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n(3 - n)$.
Calculer a_0, a_1, a_5 et a_{20}.

Exemple 2 On considère la suite (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = 2^n + 1$.
Calculer b_0, b_3 et b_{10}.
Puis, écrire les six premiers termes de la suite.

Exemple 1
$a_0 = 0(3 - 0) = 0 \times 3 = \mathbf{0}$; $a_1 = 1(3 - 1) = 1 \times 2 = \mathbf{2}$;
$a_5 = 5(3 - 5) = 5 \times (-2) = \mathbf{-10}$ et $a_{20} = 20(3 - 20) = 20 \times (-17) = \mathbf{-340}$.

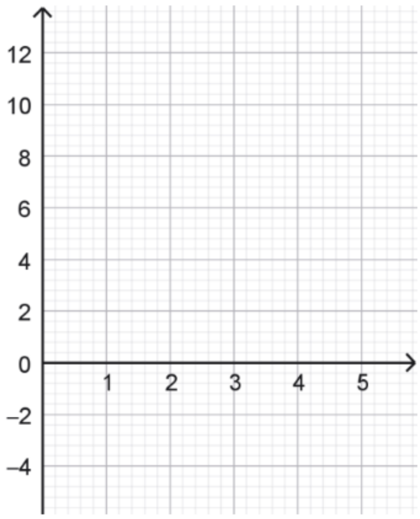
Exemple 2
$b_0 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = \mathbf{2}$; $b_3 = 2^3 + 1 = 8 + 1 = \mathbf{9}$
et $b_{10} = 2^{10} + 1 = 1\,024 + 1 = \mathbf{1\,025}$.
Les six premiers termes de la suite sont : $b_0 = 2$; $b_1 = 3$; $b_2 = 5$; $b_3 = 9$;
$b_4 = 17$ et $b_5 = 33$.

1c. Représentation graphique

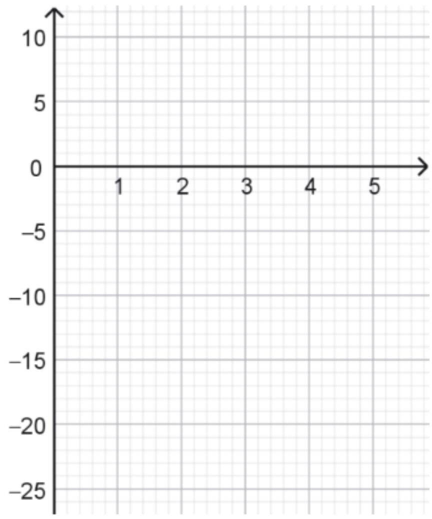
Une suite (u_n) peut se représenter graphiquement par des points de coordonnées (n, u_n).

Exemple Représenter les suites suivantes dans les repères.

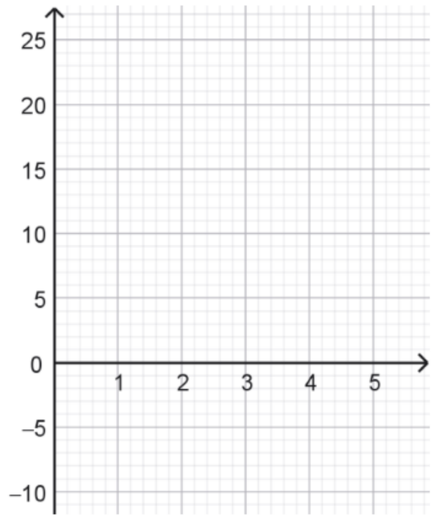
$u_n = -4 + 3n$



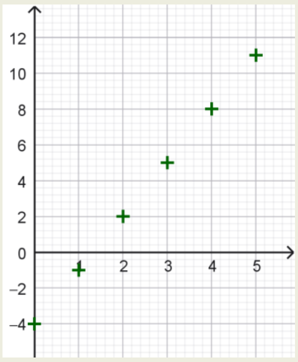
$v_n = 5 - n^2$



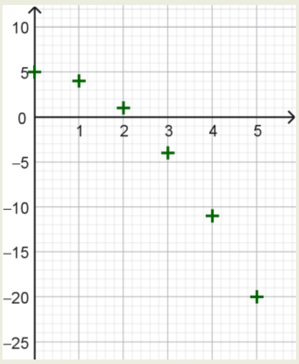
$w_n = 3n^2 - 10n$



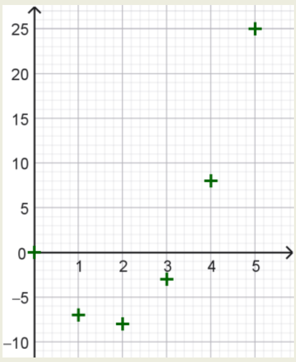
• Pour $u_n = 4 - 3n$:
$u_0 = -4 + 3 \times 0 = \mathbf{-4}$
$u_1 = -4 + 3 \times 1 = \mathbf{-1}$
On calcule de même $u_2 = \mathbf{2}$; $u_3 = \mathbf{5}$; $u_4 = \mathbf{8}$ et $u_5 = \mathbf{11}$.



• Pour $v_n = 5 - n^2$:
$v_0 = 5 - 0^2 = \mathbf{5}$
$v_1 = 5 - 1^2 = \mathbf{4}$
On calcule de même $v_2 = \mathbf{1}$; $v_3 = \mathbf{-4}$; $v_4 = \mathbf{-11}$ et $v_5 = \mathbf{-20}$.



• Pour $w_n = 3n^2 - 10n$:
$v_0 = 3 \times 0^2 - 10 \times 0 = \mathbf{0}$
$v_1 = 3 \times 1^2 - 10 \times 1 = \mathbf{-7}$
On calcule de même $w_2 = \mathbf{-8}$; $w_3 = \mathbf{-3}$; $w_4 = \mathbf{8}$ et $w_5 = \mathbf{25}$



1d. Modélisation de situations

Exemple 1 Walid paye 20 € un abonnement résidentiel annuel pour garer sa voiture dehors.
Une fois cet abonnement payé, chaque jour de stationnement ne lui coûte plus que 0,30€.
On note u_n le prix que Walid paye pour son abonnement en fonction de n, nombre de jours de stationnement.
a. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
b. Combien payera-t-il au total s'il gare sa voiture dehors 300 jours par an ?

Exemple 2 Un cinéma propose deux formules : • Formule A : des places à l'unité au tarif de 7 euros.
• Formule B : une carte d'abonnement d'un an de 10 euros qui permet d'acheter des places au tarif préférentiel de 6,30 euros l'unité.
Alex, un habitué du cinéma, hésite entre les deux formules.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le prix total de n séances sur une année sans carte d'abonnement (Formule A) et v_n le coût total de n séances sur une année avec la carte d'abonnement (Formule B).
a. Calculer u_2 et v_2.
b. Alex prévoit d'assister à 11 séances. Quelle est la formule la plus avantageuse ?
c. Donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.
d. À combien de séances faut-il assister pour que la formule B devienne avantageuse ? Justifier.

Exemple 1

a. $u_n = \mathbf{20 + 0,30}\boldsymbol{n}$
b. $u_{300} = 20 + 0,30 \times 300 = 20 + 90 = 110$. Walid paiera au total **110€**.

Exemple 2

a. u_2 correspond au prix de deux places avec la formule A, donc $u_2 = 7 \times 2 = \mathbf{14}$.
v_2 est le prix de deux places avec la formule B : $v_2 = 10 + 6,30 \times 2 = \mathbf{22,60}$.
b. $u_{11} = 7 \times 11 = 77$ et $v_{11} = 10 + 6,3 \times 11 = 79,3$.
Pour 11 séances, la **formule A** reste avantageuse.
c. $u_n = \mathbf{7}\boldsymbol{n}$ et $v_n = \mathbf{10 + 6,30}\boldsymbol{n}$.
d. On résout une inéquation :

$$\begin{aligned} & 7n > 10 + 6{,}30n \\ \Leftrightarrow\ & 7n - 6{,}30n > 10 \\ \Leftrightarrow\ & 0{,}7n > 10 \\ \Leftrightarrow\ & n > \frac{10}{0{,}7} \end{aligned}$$

ce dernier résultat étant égal à environ 14,3.
Donc il faut assister à **15 séances** pour que la formule B devienne avantageuse.

2. Suites récurrentes

2a. Termes suivant et précédent

Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul et (u_n) une suite.
Si u_n est un terme de la suite, alors le terme suivant se note u_{n+1}
et le terme précédent se note u_{n-1}

Attention : ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$!

Exemple soit (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 4n - 7$. On pose $n = 6$. On a : $w_n =$

$w_{n+1} =$ $\quad\quad$ $w_{n-1} =$

$w_n + 1 =$ $\quad\quad$ $w_n - 1 =$

Pour $n = 6$, $w_6 = 4 \times 6 - 7 = \mathbf{17}$.

$w_{n+1} = \boldsymbol{w_7} = 4 \times 7 - 7 = \mathbf{21}$

$w_{n-1} = \boldsymbol{w_5} = 4 \times 5 - 7 = \mathbf{13}$

$w_n + 1 = \boldsymbol{w_6} + \mathbf{1} = 17 + 1 = \mathbf{18}$

$w_n - 1 = \boldsymbol{w_6} - \mathbf{1} = 17 + 1 = \mathbf{16}$

Il faut bien regarder la taille de l'écriture « $+1$ » pour savoir si on ajoute 1 à l'indice (n) ou au terme (w_n).

2b. Définition

Une suite (u_n) est définie par une relation de récurrence si on connait son premier terme, et que chaque terme u_n est défini en fonction du terme précédent.

Exemple 1 a. Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 7$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$. Calculer v_1 ; v_2 et v_3.

b. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = {u_n}^2 + 1$. Calculer u_1 ; u_2 et u_3.

c. Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 1 \end{cases}$

Calculer v_1 et v_3.

d. Soit (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 2w_n + 5n$.
Calculer les quatre premiers termes.

Remarque : attention à bien différencier les deux types de suites :
- une **suite explicite** est définie par une formule en fonction de n.
On peut donc calculer le terme que l'on souhaite directement en remplaçant n.
- une **suite récurrente** possède une formule de récurrence, qui permet, quand on connaît un terme u_n, de trouver le terme suivant u_{n+1}. On ne peut donc pas calculer directement le terme de notre choix.

Exemple 2 On considère deux suites :
- la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 7$ et $a_{n+1} = 2a_n - 1$
- la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = 2n - 1$

a. Calculer les trois premiers termes de ces deux suites. **b.** Calculer b_{100}. Peut-on calculer a_{100} rapidement ?

Exemple 1

À chaque calcul, on utilise le terme précédent : pour v_1, on applique la formule en utilisant v_0. Pour v_2, on utilise v_1, etc.

a. $v_1 = 2v_0 + 3 = 2 \times 7 + 3 = 14 + 3 = \mathbf{17}$
$v_2 = 2v_1 + 3 = 2 \times 17 + 3 = 34 + 3 = \mathbf{37}$
$v_3 = 2v_2 + 3 = 2 \times 37 + 3 = 74 + 3 = \mathbf{77}$

b. $u_1 = {u_0}^2 + 1 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = \mathbf{10}$
$u_2 = {u_1}^2 + 1 = 10^2 + 1 = 100 + 1 = \mathbf{101}$
$u_3 = {u_2}^2 + 1 = 101^2 + 1 = 10\,201 + 1 = \mathbf{10\,202}$

c. $v_1 = 3v_0 - 1 = 3 \times (-2) - 1 = -6 - 1 = \mathbf{-7}$
La consigne demande de calculer v_3, mais pour cela on a besoin de connaître v_2.
$v_2 = 3v_1 - 1 = 3 \times (-7) - 1 = -21 - 1 = \mathbf{-22}$
$v_3 = 3v_2 - 1 = 3 \times (-22) - 1 = -66 - 1 = \mathbf{-67}$

d. *On connaît déjà le premier terme, c'est w_0. Il faut trouver les trois suivants.*
La formule fait aussi intervenir le n, qui est le même n que dans w_n.
Autrement dit, comme pour calculer w_1, on utilise w_0, cela signifie que $n = 0$.
$w_1 = 2w_0 + 5 \times 0 = 2 \times 3 + 0 = \mathbf{6}$
$w_2 = 2w_1 + 5 \times 1 = 2 \times 6 + 5 = \mathbf{17}$
$w_3 = 2w_2 + 5 \times 2 = 2 \times 17 + 10 = \mathbf{44}$

Exemple 2

a. *Pour la suite* (a_n)*, on connaît le premier terme* a_0*. Il faut trouver les 2 suivants.*

$a_1 = 2a_0 - 1 = 2 \times 7 - 1 = \mathbf{13}$

$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \times 13 - 1 = \mathbf{25}$

La suite (b_n)*, quant à elle, est explicite : la formule ne dépend que de* n*.*
On n'utilise donc pas b_0 *pour trouver* b_1*. Il suffit juste de remplacer le* n *de la formule par l'indice demandé.*

$b_0 = 2 \times 0 - 1 = \mathbf{-1}$

$b_1 = 2 \times 1 - 1 = \mathbf{1}$

$b_2 = 2 \times 0 - 1 = \mathbf{3}$

b. $b_{100} = 2 \times 100 - 1 = \mathbf{199}$

En revanche, on ne peut pas calculer a_{100} rapidement, car il s'agit d'une suite récurrente : il faudrait connaître a_{99}, qui lui-même nécessite a_{98}, etc.

2c. Modélisation

Exemple 1 Une somme de 1 200€ est déposée sur un livret d'épargne.
Ce livret offre une rémunération de 3% : chaque année, le montant présent sur le livret augmente de 3%.
a. Avec cette notation, que vaut u_0 ?
b. Quelle sera la valeur du livret au bout d'un an ?
c. Donner la formule de récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n.
d. Quelle sera la valeur du livret après quatre ans ?

Exemple 2 Lors de sa création, un club sportif comporte 19 adhérents.
Chaque année, le nombre d'adhérents est doublé, mais ensuite 5 adhérents quittent le club.
On note v_n le nombre d'adhérents au bout de n années.
Donner v_0, puis exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

Exemple 3 Une ludothèque possède 140 jeux de société en 2020. Chaque année, elle donne 5 % de ses jeux à une œuvre de charité et décide d'acheter 10 nouveaux jeux.
a. Combien aura-t-elle de jeux en 2021?
b. On note u_n le nombre de jeux de société de la ludothèque en 2020 + n.
Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple 4 Un matin, Mathéo décide de poser un récipient dans son jardin, contenant 200 g de noisettes.
Chaque après-midi, un écureuil vient manger la moitié du récipient, puis Mathéo remet 80 g de noisettes le soir.
On note u_n la quantité en grammes de noisettes dans le récipient le n-ième jour au matin.
a. Donner la valeur de u_1 et u_2.
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple 1
a. u_0 correspond à la valeur du livret au bout de 0 année, donc au début.
Ainsi, $u_0 = \mathbf{1\,200}$.
b. Augmenter une quantité de 3% revient à la multiplier par
$1 + \frac{3}{100} = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$.
Donc la valeur du livret au bout d'un an est $1\,200 \times 1{,}03 = \mathbf{1\,236}$**€**
c. Chaque année, la valeur du livret est multipliée par 1,03. On peut donc écrire la formule de récurrence $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times 1,03}$.
d. Il s'agit de calculer u_3, mais on a aussi besoin de u_2.
$u_1 = u_0 \times 1{,}03 = 1\,236 \times 1{,}03 = 1\,273{,}08$
$u_2 = u_1 \times 1{,}03 = 1\,273{,}08 \times 1{,}03 \approx \mathbf{1\,311,27}$**€**

Exemple 2
v_0 est le nombre d'adhérents au bout de 0 année, c'est-à-dire que $v_0 = \mathbf{19}$.
D'après l'énoncé, la formule de récurrence est $\boldsymbol{v_{n+1} = 2v_n - 5}$: le nombre d'adhérents est doublé (multiplié par 2), et ensuite 5 adhérents quittent le club.

Exemple 3 a. Le nombre de jeux diminue d'abord de 5%.
Il est donc multiplié par $1 - \frac{5}{100} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Ensuite, on lui ajoute 10.
On calcule donc $140 \times 0{,}95 + 10 = 133 + 10 = \mathbf{143}$ jeux en 2021.
b. D'après le calcul précédent : $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,95u_n + 10}$.

Exemple 4

a. On doit diviser 200 par 2, puis rajouter 80.

$u_1 = \frac{200}{2} + 80 = \mathbf{180}$ g

$u_2 = \frac{180}{2} + 80 = \mathbf{170}$ g

b. La formule de récurrence est donc $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 80}$

2d. Sens de variation

Une suite est dite :

- croissante si pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, il suffit de connaître le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ pour tout n.

Exemple 1 Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 7$.

Exemple 2 Étudier le sens de variation de (v_n) définie par $v_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3{,}5$.

Exemple 1

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n$

$= (n+1)^2 - 7 - (n^2 - 7)$

$= n^2 + 2n + 1 - 7 - n^2 + 7$

$= \mathbf{2n + 1}$

Or n est positif, donc $2n + 1$ est positif. Ainsi, la suite (u_n) est **croissante**.

Exemple 2

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} - v_n$

$= v_n - 3{,}5 - v_n$

$= \mathbf{-3,5}$

Or ce nombre est négatif. Ainsi, la suite (v_n) est **décroissante**.

3. Suites arithmétiques

3a. Définition

Soit r un nombre réel.
Une suite (u_n) arithmétique de raison r est une suite récurrente, dont la formule de récurrence est : $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple 1 On considère une suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 3.
Calculer ses six premiers termes.

Exemple 2 On considère une suite (v_n) arithmétique de premier terme 9,5 et de raison $-3{,}1$.
Calculer ses quatre premiers termes.

Exemple 3 Un compte d'assurance-vie est ouvert avec un versement initial de 1 200 €. Ensuite, on effectue un versement de 150 € chaque mois.
On note (u_n) la suite dont les termes sont égaux à la valeur du compte au bout de n mois.
a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier terme et la raison.
b. Déterminer u_3.

Exemple 1
Le premier terme $u_0 = \mathbf{7}$ est déjà donné.
Ensuite, $u_1 = u_0 + 3 = \mathbf{10}$; $u_2 = u_1 + 3 = \mathbf{13}$; $u_3 = \mathbf{16}$; $u_4 = \mathbf{19}$ et $u_5 = \mathbf{22}$.

Exemple 2 *On remarque ici que la raison peut être négative, et l'addition donnée dans la définition devient alors une soustraction.*
Le premier terme $v_0 = \mathbf{9,5}$ est déjà donné.
Ensuite, $v_1 = v_0 - 3{,}1 = \mathbf{6,4}$; $v_2 = v_1 - 3{,}1 = \mathbf{3,3}$ et $v_3 = v_2 - 3{,}1 = \mathbf{0,2}$.

Exemple 3
a. Chaque mois, la valeur du compte augmente du même nombre 150.
La suite (u_n) est donc **arithmétique** de premier terme $\boldsymbol{u_0} = \mathbf{1\,200}$ et de raison $\boldsymbol{r} = \mathbf{150}$.
b. $u_1 = 1\,200 + 150 = 1\,350$; $u_2 = 1\,350 + 150 = 1500$
et ainsi $u_3 = 1\,500 + 150 = \mathbf{1\,650}$.

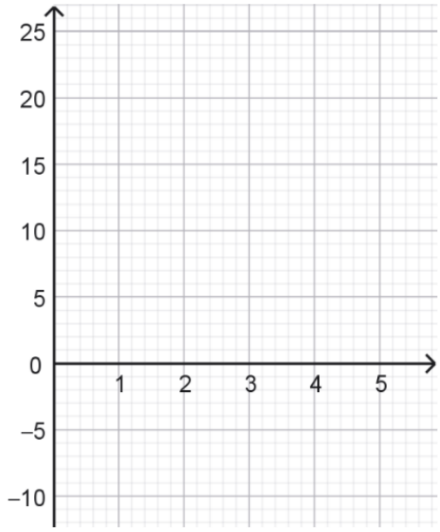
3b. Sens de variation

• Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive, décroissante si sa raison est négative.

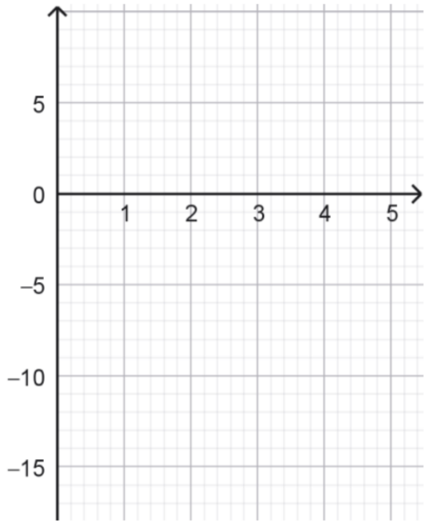
• Une suite arithmétique est représentée par des points alignés.

On parle de croissance ou décroissance linéaire.

Exemple 1 Représenter la suite (u_n) arithmétique telle que $u_0 = -6$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$



Exemple 2 Représenter la suite (v_n) arithmétique de premier terme 4 et de raison $-3,5$.



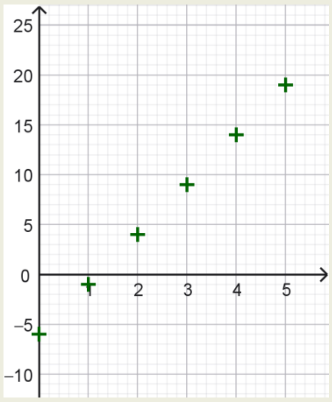
• Pour (u_n) :

$u_0 = \mathbf{-6}$

$u_1 = -6 + 5 = \mathbf{-1}$

$u_2 = -1 + 5 = \mathbf{4}$

On continue en ajoutant 5 à chaque terme pour trouver les suivants.



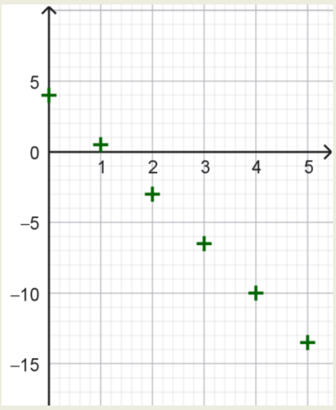
• Pour (v_n) :

$v_0 = \mathbf{4}$

$v_1 = 4 - 3,5 = \mathbf{0,5}$

$v_2 = 0,5 - 3,5 = \mathbf{-3}$

On continue en soustrayant 3,5 à chaque terme pour trouver les suivants.



3c. Démontrer qu'une suite est arithmétique

Pour savoir si une suite (u_n) est arithmétique de raison r,
on calcule $u_{n+1} - u_n$. Le résultat doit être égal au même nombre r pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1 La suite (v_n) dont les premiers termes sont : 5,9 ; 2,5 ; −0,9 ; −4,3 ; −7,7 ; −11,2 ; −14,6 ...
peut-elle être arithmétique ? Si oui, quelle serait sa raison ?

Exemple 2 On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 7 - 4n$.
Calculer a_0 , a_1 et a_2. Démontrer que la suite est arithmétique.

Exemple 3 Pour limiter la part du stockage des données dans l'électricité consommée, il est conseillé de supprimer les messages stockés dans la boîte de messagerie. Lucie décide de vider progressivement sa boîte qui contient 16 000 messages. Elle reçoit 50 nouveaux messages par jour et décide d'en supprimer 500 tous les jours.
On note pour tout entier naturel n non nul, u_n le nombre de messages stockés sur la boîte de Lucie, n jours après le début de l'opération. Ainsi, $u_0 = 16\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 15\,550$.

2. Quelle est la nature de la suite u ? Justifier.

3. Pour tout entier naturel n, on admet l'égalité suivante : $u_n = 16\,000 - 450n$.

  a. Calculer u_{10}.

  b. Déterminer le nombre de jour nécessaires pour que le nombre de messages soit inférieur à 10 000.

Exemple 1 *On calcule la différence entre les termes. Si on trouve toujours le même nombre, alors la suite peut être arithmétique.*
$2{,}5 - 5{,}9 = \mathbf{-3,4}$ mais $-11{,}2 - (-7{,}7) = -11{,}2 + 7{,}7 = \mathbf{-3,5}$.
La suite (v_n) n'est donc **pas arithmétique**.

Exemple 2 $a_0 = 7 - 4 \times 0 = \mathbf{7}$; $a_1 = 7 - 4 \times 1 = \mathbf{3}$ et $a_2 = 7 - 4 \times 2 = \mathbf{-1}$.
*On peut vérifier sur quelques termes que la suite **semble** arithmétique, mais pour le démontrer, il faut calculer la différence $a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_{n+1} - a_n = 7 - 4(n+1) - (7 - 4n) = 7 - 4n - 4 - 7 + 4n = -4$
On trouve -4 qui est constant et ne dépend pas de n. La suite est **arithmétique de raison -4**.

Exemple 3
1. Lucie reçoit 50 messages mais en supprime 500.
On calcule $u_1 = 16\,000 + 50 - 500 = 16\,000 - 450 = \mathbf{15\,550}$.
2. Chaque jour, le nombre de messages augmente de 50 puis diminue de 500,,
donc **il diminue chaque jour du même nombre 450**. C'est pourquoi la suite u est arithmétique de raison $\mathbf{-450}$.
3a. $u_{10} = 16\,000 - 450 \times 10 = 16\,000 - 4\,500 = \mathbf{11\,500}$.
3b. Il s'agit de résoudre l'inéquation $16\,000 - 450n < 10\,000$

$$\Leftrightarrow -450n < 10\,000 - 16\,000 \Leftrightarrow -450n < -6\,000 \Leftrightarrow n > \frac{-6\,000}{-450} \Leftrightarrow n > \frac{40}{3}$$

cette dernière fraction étant approximativement égale à 13,3. Donc il faudra **14 jours** pour que le nombre de messages soit inférieur à 10 000.

4. Suites géométriques

4a. Définition

Soit q un nombre réel strictement positif.
Une suite (u_n) géométrique de raison q est une suite récurrente,
de premier terme u_0 strictement positif,
dont la formule de récurrence est : $u_{n+1} = qu_n$

Exemple 1
On considère une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 4.
Calculer ses quatre premiers termes.

Exemple 2
On considère une suite (v_n) géométrique de premier terme 7 et de raison 0,6.
Calculer ses trois premiers termes.

Exemple 3
Une voiture neuve coûte 9 000€ à l'achat.
Ensuite, sa valeur diminue de 20% chaque année.
On note (v_n) la suite dont les termes sont égaux à la valeur de la voiture au bout de n années.
a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
Préciser le premier terme et la raison.
b. Déterminer v_4.

Exemple 4
Un livret d'épargne est ouvert avec un montant initial de 1 500€. Son taux de rémunération annuel est de 2,5%. On note (u_n) la suite dont les termes sont égaux à la somme d'argent sur le livret au bout de n années.
a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Préciser le premier terme et la raison.
b. Déterminer u_3 en arrondissant au centime d'euro.

Exemple 1
Le premier terme $u_0 = \mathbf{3}$ est donné. Ensuite :
$u_1 = 4u_0 = \mathbf{12}$; $u_2 = 4u_1 = \mathbf{48}$ et $u_3 = 4u_2 = \mathbf{192}$.

Exemple 2
Le premier terme $v_0 = \mathbf{7}$ est donné. Ensuite :
$v_1 = 0{,}6v_0 = \mathbf{4,2}$ et $v_2 = 0{,}6v_1 = \mathbf{2,52}$.

Exemple 3
a. Chaque année, la valeur diminue de 20%, ce qui signifie qu'elle est multipliée par $1 - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$. Ainsi, on multiplie par le même nombre chaque année. (v_n) est **géométrique** de premier terme $\boldsymbol{v_0 = 9\,000}$ et de raison $\boldsymbol{q = 0,8}$.
b. $v_1 = 9\,000 \times 0{,}8 = 7\,200$; $v_2 = 7\,200 \times 0{,}8 = 5\,760$;
$v_3 = 5\,760 \times 0{,}8 = 4\,608$ et enfin $\boldsymbol{v_4 = 3\,686,40}$ €.

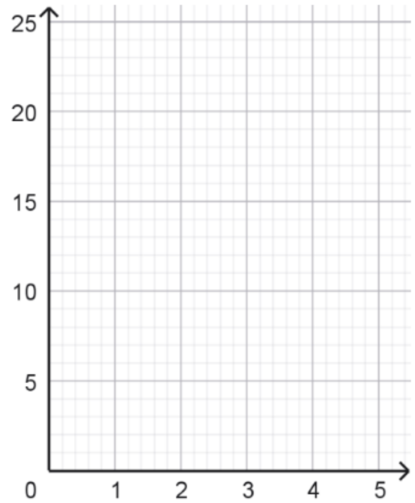
Exemple 4
a. Chaque année, la valeur augmente de 2,5%, ce qui signifie qu'elle est multipliée par $1 + \frac{2{,}5}{100} = 1 + 0{,}025 = 1{,}025$.
(u_n) est **géométrique** de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 1\,500}$ et de raison $\boldsymbol{q = 1,025}$.
b. $u_1 = 1\,500 \times 1{,}025 = 1537{,}5$; $u_2 = 1537{,}5 \times 1{,}025 \approx 1\,575{,}94$
et enfin $u_3 \approx 1\,575{,}94 \times 1{,}025 \approx \mathbf{1\,615,34}$ €.

4b. Sens de variation

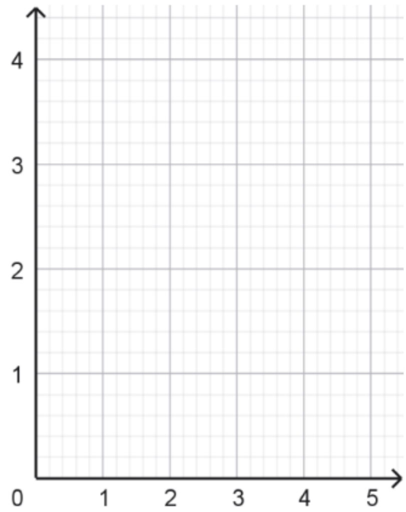
• Une suite géométrique est croissante si sa raison est supérieure à 1, décroissante si sa raison est inférieure à 1.

• Une suite arithmétique est représentée par des points placés en courbe. On parle de croissance ou décroissance exponentielle.

Exemple 1 Représenter la suite (u_n) géométrique telle que $u_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}5u_n$



Exemple 2 Représenter la suite (v_n) géométrique de premier terme 4 et de raison 0,7.



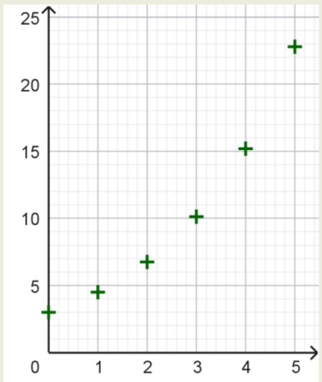
• Pour (u_n) :

$u_0 = \mathbf{3}$

$u_1 = 1{,}5 \times 3 = \mathbf{4{,}5}$

$u_2 = 1{,}5 \times 4{,}5 = \mathbf{6{,}75}$

On continue en multipliant chaque terme par 1,5 pour trouver les suivants.



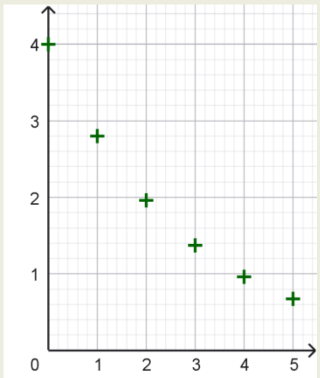
• Pour (v_n) :

$v_0 = \mathbf{4}$

$v_1 = 0{,}7 \times 4 = \mathbf{2{,}8}$

$v_2 = 0{,}7 \times 2{,}8 = \mathbf{1{,}96}$

On continue en multipliant chaque terme par 0,7 pour trouver les suivants.



4c. Démontrer qu'une suite est géométrique

Pour savoir si une suite (u_n) qui ne s'annule pas est géométrique de raison q, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Le résultat doit être égal au même nombre q pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1 Démontrer que la suite (u_n) dont les premiers termes sont : 5 ; 20 ; 80 ; 160 n'est pas géométrique.

Exemple 2 On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 3n + n^2$.
Calculer a_0 , a_1 et a_2. La suite est-elle géométrique ?

Exemple 3 En janvier 2019, un entrepreneur décide de créer une entreprise de location de trottinettes électriques dans une ville de taille moyenne. Les trottinettes ont une autonomie initiale de 50 km. Une étude montre que l'autonomie de ces trottinettes baisse de 13% chaque année.
On modélise l'autonomie de ces trottinettes, en kilomètre, à l'aide d'une suite (a_n). Pour tout entier naturel n, an représente l'autonomie, en kilomètre, de ces trottinettes pour l'année $2019 + n$. Ainsi $a_0 = 50$.
On arrondira les résultats au centième de kilomètre.
a. Calculer a_1 et a_2. Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.
b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
c. En déduire la nature de la suite (a_n) et préciser sa raison et son premier terme.
d. Déterminer l'autonomie des trottinettes en 2023.

Exemple 1
$\dfrac{20}{5} = 4$ mais $\dfrac{160}{80} = 2 \neq 4$. La suite n'est **pas géométrique**.

Exemple 2
$a_0 = 3 \times 0 + 0^2 = \mathbf{0}$; $a_1 = 3 \times 1 + 1^2 = \mathbf{4}$ et $a_2 = 3 \times 2 + 2^2 = \mathbf{10}$**.**
Or $\dfrac{a_2}{a_1} = 2{,}5$, mais $\dfrac{a_1}{a_0}$ ne peut même pas être calculé car a_0 est nul, et on ne peut pas diviser par zéro. La suite n'est **pas géométrique**.

Exemple 3
a. L'autonomie diminue de 13% chaque année, cela signifie qu'elle est multipliée par $1 - \dfrac{13}{100} = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$. Ainsi :
$a_1 = 0{,}87a_0 = 0{,}87 \times 50 = \mathbf{43{,}5\ km}$ et $a_2 = 0{,}87a_1 = 0{,}87 \times 43{,}5 \approx \mathbf{37{,}85\ km}$.
a_1 représente l'autonomie des trottinettes en 2020, et a_2 l'autonomie en 2021.
b. D'après la question précédente, l'autonomie est multipliée par le même nombre 0,87 chaque année. Donc la formule de récurrence est $\boldsymbol{a_{n+1} = 0{,}87a_n}$.
c. (a_n) est donc une suite **géométrique** de premier terme $\boldsymbol{a_0 = 50}$
et de raison $\boldsymbol{q = 0{,}87}$.
d. Le premier terme a_0 correspondait à l'autonomie en 2019, donc pour avoir l'autonomie en 2023, on doit calculer a_4 qui correspond à l'autonomie 4 années plus tard.
On connaît déjà $a_2 \approx 37{,}85$. $a_3 = 0{,}87a_2 \approx 32{,}93$ et $a_4 = 0{,}87a_3 \approx \mathbf{28{,}64\ km}$.

4d. Modélisation

Exemple 1 Une source sonore émet un son d'intensité 125 décibels. Une plaque en carton peu épaisse en absorbe 16%. On note u_n l'intensité du son, en décibels, après la traversée de n plaques. Ainsi $u_0 = 125$.
a. Justifier que $u_1 = 105$ et calculer u_2.
b. Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
c. La pose de 5 plaques en carton suffira-t-elle pour que l'intensité du son soit inférieure à 60 décibels ?

Exemple 2 Une banque propose à ses clients deux types de relevés de compte :
• type 1 : le relevé mensuel sur papier reçu par courrier ; • type 2 : le relevé en ligne sur internet.
En 2020, 230 clients ont choisi le type 1 et 650 ont choisi le type 2.
Les années suivantes, une étude laisse prévoir que le nombre de relevés du type 1 va diminuer de 30 relevés par an, alors que le nombre de relevés du type 2 va augmenter de 5 % par an.
D'après cette étude, on note u_n le nombre de clients ayant choisi les relevés du type 1 à l'année $2020 + n$; et v_n le nombre de clients ayant choisi les relevés du type 2 en $2020 + n$. Ainsi $u_0 = 230$ et $v_0 = 650$.
1. Justifier que $u_2 = 170$ et que $v_2 \approx 717$ à l'unité près.
2. Donner une interprétation des deux nombres obtenus à la question précédente.
3. Donner la nature de chaque suite et préciser leur raison respective. Laquelle relève du modèle linéaire ?

Exemple 1

a. L'intensité diminue de 16% pour chaque plaque, cela signifie qu'elle est multipliée par $1 - \frac{16}{100} = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$. Ainsi :
$u_1 = 125 \times 0{,}84 = \mathbf{105}$ et $u_2 = 105 \times 0{,}84 = \mathbf{88,2}$.
b. D'après la question précédente, l'intensité est multipliée par le même nombre 0,84 pour chaque plaque. (u_n) est donc une suite **géométrique** de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 125}$ et de raison $\boldsymbol{q = 0,84}$.
c. Il s'agit donc de calculer u_5 en repartant de u_2 que l'on connaît déjà.
$u_3 = 0{,}84u_2 = 74{,}088$; $u_4 = 0{,}84u_3 \approx 62{,}234$ et $u_5 = 0{,}84u_4 \approx \mathbf{52,276}$.
La pose de 5 plaques en carton **suffira**.

Exemple 2

1. Pour la suite (u_n), le nombre de clients diminue de 30 par an. Donc :
$u_1 = u_0 - 30 = 200$ et ainsi $u_2 = u_1 - 30 = \mathbf{170}$.
Pour la suite (v_n), le nombre de clients augmente de 5% par an, il est donc multiplié par $1 + \frac{5}{100} = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$. Ainsi :
$v_1 = 1{,}05v_0 = 682{,}5$ et $v_2 = 1{,}05v_1 = 716{,}625 \approx \mathbf{717}$.
2. u_2 représente le nombre de clients de type 1 à l'année 2020 + 2, soit **l'année 2022**. v_2 représente le nombre de clients de type 2 à l'année 2022.
3. D'après la question 1, la suite (u_n) est **arithmétique** de raison $\boldsymbol{r = -30}$ et la suite (v_n) est **géométrique** de raison $\boldsymbol{q = 1,05}$.
C'est la suite arithmétique, donc $(\boldsymbol{u_n})$, qui relève du modèle linéaire.