Chapitre 6 – Statistiques & probabilités conditionnelles

1. Tableaux croisés

1a. Calculs d'effectifs

Un tableau croisé d'effectifs présente les valeurs de deux caractères d'une population, l'une en ligne et l'autre en colonne.

Définition : l'effectif marginal d'une valeur x est le nombre d'individus présentant la valeur x.

Les « effectifs marginaux » portent ce nom car dans un tableau croisé, ils correspondent aux totaux, qui sont généralement inscrits dans les cases du bord (= de la marge) du tableau.

	...	**...**	**...**	**Total**
...				
...				
Total				

Effectifs marginaux

Exemple 1 Lors d'une enquête portant sur les 2 000 salariés d'une entreprise, on a obtenu les informations suivantes :

- 30 % des salariés ont 40 ans ou plus ;
- 40 % des salariés de 40 ans ou plus sont cadres ;
- 25 % des salariés de moins de 40 ans sont cadres.

a. Compléter le tableau d'effectifs.
b. Quel est l'effectif marginal des non-cadres?

	Moins de 40 ans	**40 ans ou plus**	**Total**
Cadres			
Non-cadres			
Total			**2 000**

Exemple 2 Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % de femmes et parmi celles-là, 62,5% sont des cadres. Par ailleurs, 90% des cadres de cette entreprise sont des femmes.

a. Compléter le tableau.
b. Quel est l'effectif marginal des hommes ?

	Femmes	**Hommes**	**Total**
Cadres			
Ouvriers & techniciens			
Total			

La quasi-totalité des calculs ici utilisent la formule pour appliquer une proportion.
Si on connaît l'effectif total et la proportion d'une partie, l'effectif de la partie est :

$$effectif = proportion \times total$$

La proportion étant exprimée comme un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple 1

Cet exemple est faisable sans calculatrice et permet de s'entraîner en vue du bac.

	Moins de 40 ans	40 ans ou plus	Total
Cadres	**350**	**240**	590
Non-cadres	1 050	360	1 410
Total	1 400	**600**	2 000

a. • On calcule d'abord les 30% de salariés qui ont 40 ans ou plus : $0{,}3 \times 2\,000 = \mathbf{600}$
On en déduit par soustraction que 1 400 salariés ont moins de 40 ans.
• 40% des 600 salariés de 40 ans ou plus sont cadres, donc on calcule $0{,}4 \times 600 = \mathbf{240}$.
Par soustraction, on trouve que 360 salariés de 40 ans ou plus sont non-cadres.
• 25%, c'est-à-dire un quart des 1 400 salariés de moins de 40 ans sont cadres, donc on calcule $0{,}25 \times 1\,400 = \mathbf{350}$.
À partir de ce dernier calcul, tout le reste du tableau se complète par additions ou soustractions.
b. L'effectif marginal des non-cadres est donc de **1 410**.

Exemple 2

	Femmes	Hommes	Total
Cadres	**135**	15	**150**
Ouvriers & techniciens	81	129	210
Total	**216**	144	360

a. • 60% des 360 salariés sont des femmes, ce qui fait $0{,}6 \times 360 = \mathbf{216}$.
On en déduit le nombre d'hommes.
• 62,5% des 216 femmes sont des cadres, donc on $0{,}625 \times 216 = \mathbf{135}$.
On en déduit le nombre d'ouvrières.
• *La dernière information est plus difficile à utiliser : comme 90% des cadres sont des femmes et qu'on connaît l'effectif de cadres femmes, on peut en déduire le nombre de cadres, en utilisant une formule sur les proportions :*

$$\text{total} = \frac{\text{effectif}}{\text{proportion}}$$

Ainsi, on calcule $\frac{135}{0{,}9} = \mathbf{150}$ cadres au total.
On peut ensuite trouver tout le reste du tableau par additions et soustractions.
b. On a trouvé que l'effectif marginal des hommes est **144**.

1b. Fréquences marginales et conditionnelles

• La fréquence marginale d'une valeur x est le quotient de l'effectif marginal de la valeur x sur l'effectif total.

• La fréquence conditionnelle de la valeur x sachant la valeur y est le quotient du nombre d'individus correspondant à x et y sur l'effectif marginal de la valeur x.

Exemple 1 Une étudiante fabrique des bijoux fantaisie. Au mois de mai, elle a fabriqué 150 bijoux dont 50 bijoux dorés. Les bijoux sont répartis de la façon suivante : 34 % des bijoux sont des bracelets ; 15 colliers sont argentés et parmi les 55 bagues fabriquées, 20 % sont dorées. *Si besoin, on arrondira au centième.*

	Colliers	**Bracelets**	**Bagues**	**Total**
Argentés				
Dorés				50
Total				150

a. À l'aide des données précédentes, compléter le tableau croisé d'effectifs.

b. Quelle est la fréquence des colliers dans la production de bijoux ?

c. Déterminer la fréquence de a valeur « doré » sachant la valeur « bracelet ».

d. Quelle est la fréquence des bagues parmi les bijoux argentés ?

e. Quelle est la fréquence des bijoux argentés parmi les bagues ?

Exemple 2 Une usine d'horlogerie fabrique des montres. Lors de la fabrication, il apparaît deux types de défauts, le défaut mécanique A et le défaut esthétique B. Sur un lot de 200 montres, 2 % des montres fabriquées présentent le défaut A, 10 % le défaut B et 178 montres ne présentent aucun défaut.

Nombre de montres	**Présentent le défaut A**	**Ne présentent pas le défaut A**	**Total**
Présentent le défaut B			
Ne présentent pas le défaut B			
Total			

a. Compléter le tableau croisé des effectifs.

b. Quelle est la fréquence f des montres présentant les deux défauts ?

c. Parmi les montres présentant le défaut B, quel est le pourcentage de celles présentant le défaut A ?

d. Le directeur affirme : « Plus de 90 % des montres ne présentent aucun des deux défauts ». A-t-il raison ?

Exemple 1

a. • On calcule d'abord le nombre de bracelets :

$$0{,}34 \times 150 = \mathbf{51}$$

• On lit ensuite qu'il y a **15** colliers argentés et **55** bagues.

	Colliers	Bracelets	Bagues	Total
Argentés	**15**	41	44	100
Dorés	29	10	**11**	50
Total	44	**51**	**55**	150

• Enfin, sur ces 55 bagues, 20% sont dorées. On calcule $0{,}2 \times 55 = \mathbf{11}$

On peut compléter tout le reste par addition et soustraction.

b. *La fréquence (marginale) des colliers, c'est l'effectif (marginal) des colliers divisé par l'effectif total de tous les bijoux.*

On compte 44 colliers parmi les 150 bijoux. On calcule $\frac{44}{150} \approx \mathbf{0,29}$, ou 29%.

c. *Ici, c'est une fréquence conditionnelle. On cherche la fréquence des bijoux dorés parmi les bracelets, donc on divisera par l'effectif des bracelets.*

On a 41 bijoux dorés parmi les 51 bracelets. On calcule $\frac{41}{51} \approx \mathbf{0,80}$, soit 80%.

Dans les deux questions suivantes, l'ordre des critères est important : on part du même effectif, mais pas parmi le même effectif marginal.

d. On compte 44 bagues parmi les 100 bijoux argentés, donc $\frac{44}{100} = \mathbf{0,44} = 44\%$

e. On compte 44 bijoux argentés parmi les 55 bagues, donc $\frac{44}{55} = \mathbf{0,8} = 80\%$.

Exemple 2 *Un autre exemple d'exercice faisable sans calculatrice.*

a. • L'effectif total est **200**.

• Sur toutes les montres, 2% ont le défaut A : $0{,}02 \times 200 = \mathbf{4}$

• Sur toutes les montres, 10% ont le défaut B : $0{,}1 \times 200 = \mathbf{20}$

• Enfin, 178 montres n'ont aucun défaut.

Nombre de montres	Défaut A	Pas de défaut A	Total
Défaut B	2	18	**20**
Pas de défaut B	2	**178**	180
Total	**4**	196	**200**

b. La fréquence des 2 montres ayant les deux défauts parmi toutes les montres est : $\frac{2}{200} = 0{,}01 = \mathbf{1}\%$. *Notez qu'il ne s'agit ni d'une fréquence marginale, ni d'une fréquence conditionnelle.*

c. Parmi les 20 montres présentant le défaut B, 2 possèdent aussi le défaut A. La fréquence conditionnelle est : $\frac{2}{20} = 0{,}1 = \mathbf{10}\%$

d. La fréquence *(à nouveau, ni marginale ni conditionnelle)* des 178 montres ne présentant aucun défaut est : $\frac{178}{200} = 0{,}89 = \mathbf{89}\%$. Le directeur a donc **tort**.

1c. Utilisation d'un tableur

Les tableurs permettent d'entrer des formules **qui commencent toutes par le signe =**.
Les formules contiennent généralement des opérations avec les symboles **+ ; - ; * et /** et qui portent généralement sur les cellules (cases) déjà remplies.
Par exemple : **=A1– A2** soustraira les cellules A1 et A2, ou bien **=B3*B4** pour multiplier les cellules B3 et B4.
Il existe deux formules particulières à connaître, **=SOMME(...)** et **=MOYENNE(...)**.
Par exemple, **=MOYENNE(A1:A8)** calculera la moyenne de toutes les cellules de A1 à A8.

Exemple Un restaurant propose trois formules :
- Formule A : entrée + plat
- Formule B : plat + dessert
- Formule C : entrée + plat + dessert

	A	B	C	D	E
1		Formule A	Formule B	Formule C	Total
2	Déjeuner M	27	31		75
3	Dîner S	12	20	53	
4	Total	39	51	70	

On note le choix des clients venus pour déjeuner à midi (ensemble noté M) ou pour dîner le soir (ensemble noté S) dans un tableur, afin d'obtenir la capture d'écran.
a. Quel effectif doit-on écrire dans la cellule D2 ?
b. Le restaurateur aimerait compléter le reste du tableau avec des formules.
Quelles formules doit-il entrer dans les cellules E3 et E4 ? Quels résultats obtient-on ?
c. Quelle formule doit-on entrer pour calculer la fréquence des clients ayant dîné le soir ?
Quel résultat obtient-on en pourcentage ?
d. Quelle formule doit-on entrer pour calculer la fréquence des clients ayant choisi la formule A parmi ceux qui sont venus déjeuner le midi ? Quel résultat obtient-on en pourcentage ?
e. Le patron du restaurant déclare : « j'ai une carte des desserts très attractive car plus des trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert. » A-t-il raison ? Justifier.

a. On calcule $75 - 27 - 31 = \mathbf{17}$.
b. • Dans la cellule E3, on peut entrer **=B3+C3+D3** ou **=SOMME(B3 :D3)**.
On obtient **85**.
• Dans la cellule E4, on peut entrer **=E2+E3** ou **=SOMME(E2 :E3)**.
On obtient **160**.
c. L'effectif des clients ayant dîné le soir est en cellule E3, l'effectif total est en E4.
La fréquence marginale des clients du soir est donnée par la formule **=E3/E4**.
On calcule : $\frac{85}{160} = 0{,}53125 = \mathbf{53,125}\%$.
d. On recherche la fréquence des formules A parmi les clients du midi.
C'est une fréquence conditionnelle, qui est donnée par la formule **=B2/E2**.
On calcule : $\frac{27}{75} = 0{,}36 = \mathbf{36}\%$.
e. Les formules avec dessert sont la B et la C, ce qui correspond à $51 + 70 = \mathbf{121}$ clients. On calcule : $\frac{121}{160} = 0{,}75625 = \mathbf{75,625}\%$, ce qui représente bien plus des trois quarts (75%). Le patron a donc **raison**.

2. Probabilités simples

2a. Probabilité d'un événement

Définitions :

• Soit A un événement aléatoire. Sa probabilité, notée $p(A)$ ou $P(A)$, est un nombre compris entre 0 et 1.

• Le cardinal d'un ensemble A, noté card(A), est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Propriété : Si tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on parle d'équiprobabilité. Dans ce cas :

$$p(A) = \frac{\text{card(A)}}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple 1 On fait tourner la roue ci-contre.

Soient A : *« obtenir un nombre pair »* et B : *« obtenir un nombre supérieur ou égal à 2 »*

Donner $p(A)$ et $p(B)$, sous forme de fraction simplifiée, de nombre décimal et de pourcentage.

Exemple 2 On réalise deux pile ou face d'affilée. **a.** Représenter la situation sous forme d'arbre.

b. Soient A : « obtenir deux pile » et B : « obtenir au moins un pile ». Donner $p(A)$ et $p(B)$.

Exemple 3 Un grossiste commande 1 000 poissons pêchés dans différentes mers.

On choisit un poisson au hasard. On note :

- D l'événement : « le poisson est une daurade »,
- A : « le poisson a été pêché en Atlantique »,
- M : « le poisson est un merlan ».

a. Calculer les effectifs marginaux.

b. Déterminer $p(A)$; $p(D)$ et $p(M)$ en pourcentage.

	Mer du Nord	**Océan Atlantique**	**Mer Méditerranée**	**Total**
Sardine	0	125	75	
Daurade	260	80	345	
Merlan	25	45	45	
Total				1 000

Exemple 1

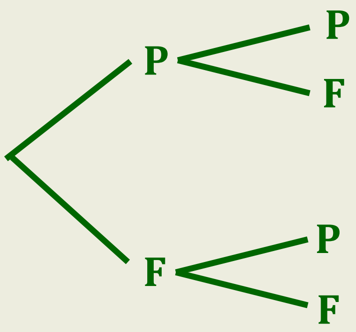
• La roue est divisée en dix secteurs, et quatre de ces secteurs comportent un nombre pair. $p(A) = \frac{4}{10} = \mathbf{\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%}$

• Sept secteurs de la roue comportent un nombre supérieur ou égal à 2.

$p(B) = \mathbf{\frac{7}{10} = 0,7 = 70\%}$

Exemple 2

a.



b. Il existe quatre parcours possibles.
L'événement A correspond à un seul parcours,
donc $p(A) = \mathbf{\frac{1}{4}}$
L'événement B correspond à trois parcours,
donc $p(B) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

Exemple 3

a.

	Mer du Nord	Océan Atlantique	Mer Méditer-ranée	Total
Sardine	0	125	75	**200**
Daurade	260	80	345	**685**
Merlan	25	45	45	**115**
Total	**285**	**250**	**465**	1 000

b.

• 250 poissons ont été pêchés dans l'Atlantique sur les 1 000 poissons, donc $p(A) = \frac{250}{1\,000} = 0{,}25 = \mathbf{25}\%$

• 685 daurades ont été pêchées, donc $p(D) = \frac{685}{1\,000} = 0{,}685 = \mathbf{68,5}\%$

• 115 merlans ont été pêchés, donc $p(M) = \frac{115}{1\,000} = 0{,}115 = \mathbf{11,5}\%$

2b. Événement complémentaire

Définition : Le complémentaire d'un événement A, noté $\bar{A}$ (on lit « non-A ») est l'événement contraire de A.

Propriété : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple 1 On lance un D10 (un dé à 10 faces, numérotées de 1 à 10)

a. On considère A : *« obtenir 7 ou plus ». Donner* $\bar{A}$ et calculer $p(\bar{A})$.

b. On considère B : *« obtenir un multiple de 4 ». Donner* $\bar{B}$ et calculer $p(\bar{B})$.

Exemple 2 Le gérant d'un restaurant développe une nouvelle formule de restauration rapide le midi. Il propose un menu comprenant un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux plats (viande ou poisson) et trois desserts (pâtisserie, laitage ou fruit). Il teste sa formule pendant un mois et étudie toutes les commandes pour mieux connaître les souhaits de sa clientèle.

- Parmi les 600 commandes faites au cours de ce mois, 72 % comprenaient un plat de viande.
- 45 % des clients ont pris une pâtisserie et, parmi eux, 44 avaient choisi le plat de poisson.
- Parmi les 138 commandes comprenant un fruit comme dessert, 73 comprenaient le plat de poisson.

1. Compléter le tableau d'effectifs.

	Pâtisserie	Laitage	Fruit	Total
Viande				
Poisson	44		73	
Total				600

On choisit une commande au hasard parmi celles faites pendant le mois de l'enquête. On note :

- A : l'événement « La commande comprend du poisson »
- B : l'événement « La commande comprend une pâtisserie »

2. Calculer la probabilité des événements A, B et $\bar{A}$.

3. Décrire l'événement $\bar{B}$ par une phrase, puis calculer $p(\bar{B})$.

Exemple 1

a. $\bar{A}$, le contraire de A, correspond à l'événement « obtenir moins de 7 ».
Ainsi, les issues de l'événement $\bar{A}$ sont : **{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}**.

Il y en a 6, donc $p(\bar{A}) = \frac{6}{10} = \mathbf{0,6}$

a. $\bar{B}$, le contraire de B, correspond à « ne pas obtenir un multiple de 4 ».
Ainsi, les issues de l'événement $\bar{B}$ sont : **{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10}**.

Il y en a 8, donc $p(\bar{B}) = \frac{8}{10} = \mathbf{0,8}$

Exemple 2

1. • Le nombre de commandes avec viande est :

$$0{,}72 \times 600 = \mathbf{432}$$

• Le nombre de commandes avec pâtisserie est : $0{,}45 \times 600 = \mathbf{270}$

	Pâtisserie	**Laitage**	**Fruit**	**Total**
Viande	226	145	65	**432**
Poisson	44	47	73	168
Total	**270**	192	138	600

2.

• On compte 168 commandes avec poisson sur les 600 commandes, donc

$$p(A) = \frac{168}{600} = 0{,}28 = \mathbf{28}\%$$

• On compte 270 commandes avec pâtisserie sur les 600 commandes, donc

$$p(B) = \frac{270}{600} = 0{,}45 = \mathbf{45}\%$$

• Avec la formule, $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72 = \mathbf{72}\%$

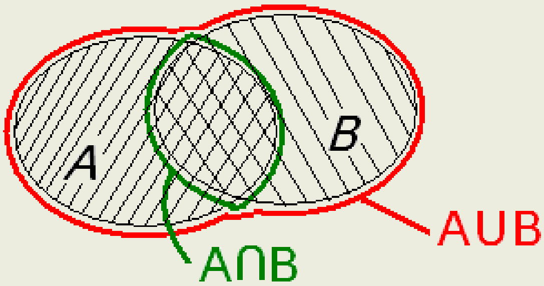
3. $\bar{B}$ est l'événement : « la commande ne comporte **pas de pâtisserie** ».

On peut encore utiliser la formule (ou compter le nombre de commandes sans pâtisserie, mais c'est plus long).

$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55 = \mathbf{55}\%$

2c. Union et intersection

• L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'événement qui se réalise si A et B sont réalisés en même temps.



• L'union de A et de B, notée $A \cup B$, est l'événement qui se réalise si soit A, soit B, soit les deux sont réalisés.

Propriété : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$
ou, de façon équivalente, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple 1 On lance un D20 (dé à vingt faces). On considère les événements suivants :
A : *« obtenir un multiple de 3 »* B : *« obtenir un multiple de 4 »* C : *« obtenir 15 ou plus »*
Donner les issues qui composent les événements : A ; B ; C ; $\bar{C}$; $A \cap B$; $C \cap \bar{A}$ et $B \cup C$.

Exemple 2 Voici la répartition des élèves dans une classe :
On interroge un élève au hasard.
On appelle F : *« interroger une fille »*
et D : *« interroger un demi-pensionnaire »*.
Donner $p(F)$; $p(\bar{F})$; $p(F \cap D)$; $p(\bar{F} \cap D)$ et $p(F \cup D)$ sous forme de fraction irréductible.

	Externes	**Demi-pensionnaires**
Filles	7	11
Garçons	9	6

Exemple 3 Dans une usine, on produit en série 10 000 pièces par jour. Ces pièces passent un contrôle qualité pour éliminer une partie des pièces défectueuses. Le gérant décide de réaliser une étude complète et minutieuse de la production du jour. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Pièces conformes	Pièces défectueuses	Total
Pièces acceptées au contrôle qualité	8 280	60	8 340
Pièces rejetées au contrôle qualité	720	940	1 660
Total	9 000	1 000	10 000

On tire une pièce de la production au hasard et on note :
• A : « La pièce tirée est acceptée par le contrôle qualité. » • C l'événement : « La pièce tirée est conforme. »
1. Calculer la probabilité de A puis de $\bar{A}$.
2. Pour chaque événement, le définir par une phrase puis calculer sa probabilité en pourcentage.
a. $A \cap C$ **b.** $A \cup C$ **c.** $C \cap \bar{A}$

Exemple 1

• $\boldsymbol{A} = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$; $\boldsymbol{B} = \{4; 8; 12; 16; 20\}$ et $\boldsymbol{C} = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$
• $\bar{C}$ contient tous les nombres qui ne sont pas dans C. Donc $\bar{\boldsymbol{C}} = \{1; 2; \dots; 13; 14\}$
• $A \cap B$ contient les nombres qui sont à la fois dans A et dans B. $\boldsymbol{A \cap B} = \{12\}$
• $C \cap \bar{A}$ contient les nombres qui sont dans C mais pas dans A.

$$\boldsymbol{C \cap \bar{A}} = \{16; 17; 19; 20\}$$

• $B \cup C$ contient les nombres qui sont dans B ou dans C (ou dans les deux à la fois) : $\boldsymbol{B \cup C} = \{4; 8; 12; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.

Exemple 2

On remarque d'abord que l'effectif total est : $7+11+9+6=\mathbf{33}$

• On compte 18 filles, donc $p(F)=\frac{18}{33}=\mathbf{\frac{6}{11}}$

• On compte 15 garçons, donc $p(\bar{F})=\frac{15}{33}=\mathbf{\frac{5}{11}}$

• On compte 11 filles demi-pensionnaires, donc $p(F\cap D)=\frac{11}{33}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

• On compte 6 garçons demi-pensionnaires, donc $p(\bar{F}\cap D)=\frac{6}{33}=\mathbf{\frac{2}{11}}$

• $F\cup D$ correspond aux élèves qui sont soit des filles, soit demi-pensionnaires, soit les deux. Il y en a donc $7+11+6=24$. $p(F\cup D)=\frac{24}{33}=\mathbf{\frac{8}{11}}$

Exemple 3

1. On compte 8 340 pièces acceptées sur les 10 000, donc $p(A)=\frac{8\,340}{10\,000}=\mathbf{0{,}834}$

Ainsi, $p(\bar{A})=1-p(A)=1-0{,}834=\mathbf{0{,}166}$

2a. $A\cap C$ correspond à « **la pièce est acceptée ET conforme** ».

Dans le tableau, cela correspond à 8 280 pièces. $p(A\cap C)=\frac{8\,280}{10\,000}=\mathbf{0{,}828}$

2b. $A\cup C$ correspond à « **la pièce est acceptée OU conforme** ».

On applique la formule. $p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)$.

Il nous faut d'abord calculer $p(C)=\frac{9\,000}{10\,000}=0{,}9$

Ainsi, $p(A\cup C)=0{,}834+0{,}9-0{,}828=\mathbf{0{,}906}$

2c. $C\cap\bar{A}$ correspond à « **la pièce est conforme ET n'est PAS acceptée** ».

Dans le tableau, cela correspond à 720 pièces. $p(C\cap\bar{A})=\frac{720}{10\,000}=\mathbf{0{,}072}$

3. Probabilités conditionnelles

3a. Définition

Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $p_B(A)$, la probabilité que A se réalise si on suppose que B est réalisé. On a :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$

Par produit en croix, on trouve $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

Exemple 1 Une boulangerie propose 500 pains dont la répartition est donnée dans le tableau ci-contre. On choisit un pain au hasard dans cette boulangerie. On note
- A l'événement « le pain choisi est un pain maison »
- B l'événement « le pain choisi est un pain complet »

	Nature	Complet	Total
Pains maison	140	70	210
Pains de campagne	210	80	290
Total	350	150	500

a. Calculer $p_A(B)$ puis $p_B(A)$, en pourcentage arrondi à l'unité.
b. Exprimer la probabilité de choisir un pain maison parmi les pains nature. Puis, calculer cette probabilité.

Exemple 2 On réalise un test de dépistage d'un virus sur 1 000 personnes, dont 96% sont saines et 4% sont porteuses du virus. Parmi les personnes saines, le test est négatif dans 97,5% des cas. On parle dans ce cas de spécificité du test. Parmi les porteurs du virus, le test est positif dans 95% des cas. On parle alors de sensibilité du test.

	Test positif	Test négatif	Total
Patient sain			
Patient malade			
Total			1000

1. Compléter le tableau.
2. On choisit un patient au hasard.
On appelle V l'événement « la personne est porteuse du virus » et T l'événement « le test est positif ».
Dans chaque cas, exprimer la probabilité demandée avec les événements V et T, puis la calculer.
a. La probabilité que la personne choisie soit porteuse du virus et positive.
b. La probabilité que la personne soit porteuse du virus sachant que le test est positif.
c. La probabilité que la personne soit positive sachant qu'elle est porteuse du virus.
d. La probabilité que la personne soit saine sachant que le test est négatif.

Exemple 1 **a.** • *Pour calculer $p_A(B)$ « la probabilité de B* ***sachant A*** *», on ne doit regarder* ***que dans la ligne correspondant à A****, c'est-à-dire aux pains maison. Notez que cela correspond aux* ***fréquences conditionnelles****, vues en partie 1.*

$p_A(B) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3} \approx \mathbf{33\%}$

• *En revanche, pour $p_B(A)$ « la probabilité de A* ***sachant B*** *», on ne doit regarder* ***que dans la colonne correspondant à B****, c'est-à-dire les pains complets.*

$p_B(A) = \frac{70}{150} = \frac{7}{15} \approx \mathbf{47\%}$

b. L'événement « pain nature » correspond aux pains non-complets, c'est-à-dire à $\bar{B}$. Ainsi, la probabilité demandée est $\boldsymbol{p_{\bar{B}}(A)} = \frac{140}{350} = \frac{2}{5} = \mathbf{40\%}$

Exemple 2

	Positif	Négatif	Total
Sain	24	**936**	**960**
Malade	**38**	2	40
Total	62	938	1 000

1. • On calcule d'abord le nombre de personnes saines : $0{,}96 \times 1\,000 = \mathbf{960}$.
Le 4% donné dans l'énoncé est redondant.
• 97,5% des personnes saines ont un test négatif : $0{,}975 \times 960 = \mathbf{936}$
• 95% des personnes malades ont un test positif : $0{,}95 \times 40 = \mathbf{38}$
On complète tout le reste par additions/soustractions.
2. *Notez que l'événement V correspond à la ligne « malade ».*
a. On demande la probabilité que la personne choisie (sans conditions) corresponde à la fois à V et à T, et on la choisit parmi tout le monde.
Il s'agit de $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{T}) = \frac{38}{1\,000} = \mathbf{3,8}\%$
b. On cherche la probabilité que la personne choisie corresponde à V, et on la choisit uniquement parmi celles ayant un test positif T.
Il s'agit de $\boldsymbol{p_T}(\boldsymbol{V}) = \frac{38}{62} \approx \mathbf{61}\%$
c. On cherche la probabilité que la personne choisie corresponde à T, et on la choisit uniquement parmi les porteurs du virus V.
Il s'agit de $\boldsymbol{p_V}(\boldsymbol{T}) = \frac{38}{40} = \mathbf{95}\%$. *Cette probabilité était donnée dans l'énoncé…*
d. On cherche la probabilité que la personne choisie corresponde à $\bar{V}$, et on la choisit uniquement parmi les personnes négatives $\bar{T}$.
Il s'agit de $\boldsymbol{p_{\bar{T}}}(\bar{\boldsymbol{V}}) = \frac{936}{938} \approx \mathbf{99,8}\%$.

3b. Applications

Exemple 1 Dans une ville de 15 000 foyers, 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif. Parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30% consomment des produits bio. Parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio. On choisit au hasard un foyer dans cette ville.
On note T l'événement : « Le foyer pratique le tri sélectif »
et B l'événement : « Le foyer consomme des produits bio ».

	A	B	C	D
1		T	non-T	total
2	B			
3	non-B			
4	total			15 000

1. Compléter la capture d'écran de tableur à partir des valeurs fournies précédemment.
2. Montrer que la probabilité de l'événement B est égale à 0,24.
3. Calculer la probabilité qu'un foyer pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme bio.
4. Calculer $P_T(\bar{B})$ et interpréter ce résultat. Dans le tableur, quelle formule permettrait d'obtenir ce résultat ?

Exemple 2 Dans un club de judo, les adhérents sont classés par catégorie d'âge et suivant le sexe.

	Enfants : de 11 à 14 ans	Jeunes : de 15 à 20 ans	Adultes : 21 ans et plus	Total
Femmes	31		8	64
Hommes			4	
Total	63			120

1. Compléter le tableau.
Les réponses suivantes seront données sous forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer la fréquence d'adultes parmi les adhérents de ce club.
3. On choisit au hasard un adhérent du club de judo. On considère les événements suivants :
• E : « L'adhérent est un enfant » • F : « L'adhérent est une femme » • G : « L'adhérent est un homme »
a. Calculer la probabilité de l'événement E. **b.** Calculer la probabilité de $E \cap F$ et l'interpréter.
c. Calculer la probabilité que l'adhérent soit une femme sachant que c'est un enfant. **d.** Calculer $p_G(\bar{E})$.

Exemple 1

1. • On calcule d'abord $0{,}3 \times 10\,500 = \mathbf{3150}$ pour avoir le nombre de foyers consommant bio parmi les 10 500 pratiquant le tri sélectif.
• Tout le reste se trouve par addition/soustraction.

	T	non-T	total
B	**3 150**	450	3 600
non-B	7 350	4 050	11 400
total	10 500	4 500	15 000

2. On calcule $p(B) = \dfrac{3\,600}{15\,000} = \mathbf{0,24}$

3. On nous demande de trouver $p_B(T) = \dfrac{3\,150}{3\,600} = \mathbf{0,875}$

4. $p_T(\bar{B}) = \dfrac{7\,350}{10\,500} = \mathbf{0,7}$.
Ce résultat s'interprète de la manière suivante : **70% des foyers qui pratiquent le tri sélectif ne consomment pas bio**.
Dans le tableur, il faudrait saisir **=B3/B4**.

Exemple 2

1. Tout le tableau se remplit à l'aide d'additions et soustractions.

	Enfants	Jeunes	Adultes	Total
Femmes	31	**25**	8	64
Hommes	**32**	**20**	4	**56**
Total	63	**45**	**12**	120

2. On cherche la fréquence d'adultes parmi tout le monde, c'est-à-dire $\frac{12}{120} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$.

3. a. $p(E) = \frac{63}{120} = \boldsymbol{\frac{21}{40}}$

b. $p(E \cap F) = \boldsymbol{\frac{31}{120}}$. Il s'agit de la probabilité que l'adhérent choisi parmi tout le monde, soit à la fois un enfant et une femme (une fille, donc).

c. $p_E(F) = \boldsymbol{\frac{31}{63}}$.

d. Parmi les 56 hommes (G), on compte $20 + 4 = 24$ adhérents qui ne sont pas des enfants. Donc $p_G(\bar{E}) = \frac{24}{56} = \boldsymbol{\frac{3}{7}}$.