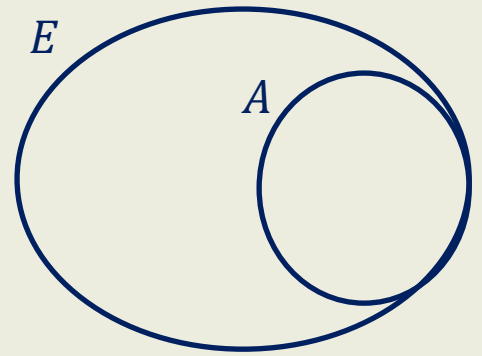


Chapitre 1 – Proportions et pourcentages

1. Définition

1a. Proportions

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble.
On appelle **effectif** le nombre d'éléments de A ,
et **effectif total** le nombre d'éléments de E .



La **proportion** des éléments de A par rapport à E (appelée aussi **fréquence**) est : $\text{proportion} = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$
C'est un nombre entre 0 et 1.

Pour les exemples 1 et 2, donner la réponse sous forme de fraction simplifiée et de nombre décimal.

Exemple 1 Lors d'un contrôle de vitesse sur une autoroute, 1 404 véhicules sont passés devant un radar.
81 d'entre eux circulaient trop vite.
Quelle est la proportion de véhicules qui circulaient trop vite ?

Exemple 2 Sur les 120 employés que compte une entreprise, il y a 54 hommes. Quelle est la proportion de femmes dans l'entreprise ?

Exemple 3 Le tableau ci-contre indique la taille d'un enfant en fonction de son âge.
Est-ce une situation de proportionnalité ?

Âge (en années)	2	5	10	12
Taille (en cm)	80	100	125	150

Exemple 1 L'effectif total est 1 404, l'effectif des véhicules circulant trop vite est 81.

La proportion de véhicules circulant trop vite est $\frac{81}{1\,404}$.

On peut simplifier cette fraction par 9, puis par 3 : $\frac{81}{1\,404} = \frac{9}{156} = \frac{3}{52}$
ou donner une valeur approchée au centième : $\frac{81}{1\,404} \approx 0,06$

Exemple 2 La proportion de femmes dans l'entreprise est $\frac{54}{120}$.

On peut simplifier cette fraction par 6 : $\frac{54}{120} = \frac{9}{20}$
ou donner une valeur décimale : $\frac{54}{120} = 0,45$

Exemple 3 S'il s'agissait d'une situation de proportionnalité, d'après la première colonne, le coefficient serait : $\frac{80}{2} = 40$
Or dans la deuxième colonne, $5 \times 40 = 200 \neq 100$. Ce n'est **pas une situation de proportionnalité**.

1b. Calculs en pourcentages

On peut écrire la proportion avec un nombre, une fraction ou un **pourcentage** (ce qui équivaut à une **fraction de dénominateur 100**).

Exemple 1 Convertir les pourcentages en nombres décimaux, et vice-versa.

37% =	4% =	80% =	3,7% =	87,4% =
0,23 =	0,086 =	0,06 =	0,9 =	0,003 =

Exemple 2 Lors d'une élection, dans une commune où 480 votes ont été exprimés, un candidat a obtenu 132 voix. Calculer le pourcentage de votes pour ce candidat.

Exemple 3 La taxe sur les cigarettes est différente de celle appliquée sur les autres biens de consommation. Par exemple, un paquet vendu 13,80 € comprend une taxe reversée à l'état de 11,04 €. Quel est le pourcentage de la taxe par rapport au prix TTC ?

Exemple 4 Une paire de chaussures a été achetée en soldes à 49€ alors qu'elle valait initialement 75€. Quel est le pourcentage de réduction, arrondi à l'unité ?

Exemple 1
Pour convertir un pourcentage en nombre décimal, on décale la virgule de deux rangs à droite. 37% = 0,37; 4% = 0,04; 80% = 0,8; 3,7% = 0,037 ; 87,4% = 0,874
Et pour l'opération inverse, on décale la virgule de deux rangs à gauche.
0,23 = 23% ; 0,086 = 8,6% ; 0,06 = 6% ; 0,9 = 90% et 0,003 = 0,3%.

Exemple 2 La proportion de voix pour le candidat est $\frac{132}{480} = 0,27 = 27,5\%$.

Exemple 3 Le pourcentage de la taxe par rapport au prix est $\frac{11,04}{13,80} = 0,8 = 80\%$.

Exemple 4 Il s'agit d'une réduction de $75 - 49 = 26\text{€}$.
Le pourcentage correspondant est $\frac{26}{75} \approx 0,35 = 35\%$.

2. Appliquer une proportion

2a. Déterminer un effectif

Pour appliquer une proportion et trouver l'effectif d'une partie, on la multiplie par l'effectif total : **effectif = effectif total × proportion**

Exemple 1 Un pot de 350 g de confiture contient 45% de fruits.

Quelle est la masse de fruits contenue dans le pot ?

Exemple 2 Lors d'une élection, dans une commune où 480 votes ont été exprimés, une candidate a obtenu 11,25 % des voix. Calculer le nombre de personnes qui ont voté pour elle.

Exemple 3 Selon une étude, la fréquence du nombre de gauchers en France est de 0,127.

La population française est de 67 millions. Combien y a-t-il de gauchers en France ?

Exemple 4 Dans un lycée comportant 945 élèves, quatre élèves sur quinze mangent à la cantine. Combien d'élèves ne mangent pas à la cantine ?

Exemple 1

$45\% = 0,45$ donc on calcule $350 \times 0,45 = 157,5$ g de fruits dans le pot.

Exemple 2

$11,25\% = 0,1125$ donc on calcule $480 \times 0,1125 = 54$ voix obtenues.

Exemple 3

$67\,000\,000 \times 0,127 = 8\,509\,000$ donc il y a environ 8,509 millions de gauchers en France.

Exemple 4

$945 \times \frac{4}{15} = \frac{3\,780}{15} = 252$ élèves mangent à la cantine.

Donc $945 - 252 = 693$ élèves ne mangent pas à la cantine.

2b. Déterminer un effectif total

Si on connaît la proportion et l'effectif d'une partie :

$$\text{effectif total} = \frac{\text{effectif}}{\text{proportion}}$$

Exemple 1 Lors d'un match, 60% des places ont été vendues aux supporters du club local, soit 900 places. Quelle est la capacité du stade ?

Exemple 2 Une boulangerie a vendu 148 pains au chocolat pendant une journée. On estime que cela représente 37% des viennoiseries vendues ce jour-là. Combien de viennoiseries ont été vendues ?

Exemple 3 Dans une usine, 28 pièces fabriquées lors d'une journée sont défectueuses. On sait que cela représente 3,5% du total des pièces fabriquées ce jour. Combien de pièces non défectueuses ont été fabriquées ?

Exemple 1

La question est différente de celles de la partie précédente : le nombre 900 correspond à l'effectif d'une partie (les places vendues aux supporters locaux) et on recherche l'effectif total.

60% = 0,6 donc on calcule $\frac{900}{0,6} = 1\ 500$ places au total.

Exemple 2

37% = 0,37 donc on calcule $\frac{148}{0,37} = 400$ viennoiseries au total.

Exemple 3

3,5% = 0,035 donc on calcule $\frac{28}{0,035} = 800$ pièces au total.

Le nombre de pièces non défectueuses est donc $800 - 28 = 762$.

3. Proportions successives

3a. Proportion de proportion

On peut appliquer plusieurs proportions d'affilée, en faisant éventuellement un **schéma**.

Exemple 1 Dans un champ, 800 pommes ont été récoltées. On sait que 75% des pommes récoltées sont des pommes vertes, et que 2% d'entre elles présentent un défaut.
Combien a-t-on récolté de pommes vertes présentant un défaut ?

Exemple 2 Les élèves de BTS représentent 12% des élèves d'un lycée. Or, sur le site internet du lycée, on peut lire que 35% des élèves de BTS sont en formation par alternance, et que ce sont les seuls élèves concernés par les formations en alternance.

Quel est la proportion d'élèves du lycée qui suivent une formation en alternance ?

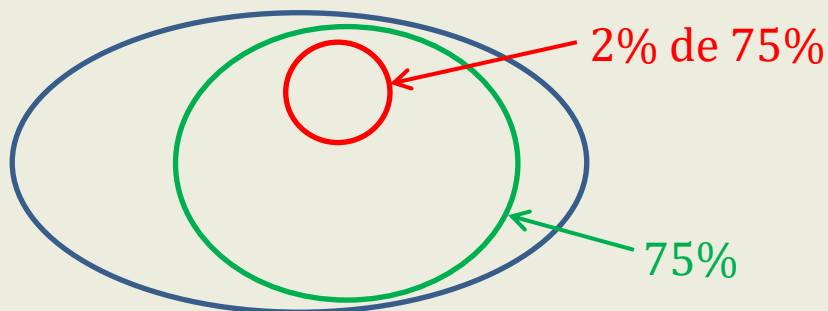
Exemple 3 On effectue un sondage sur des spectateurs sortant d'une séance de cinéma, qui révèle que 60% des spectateurs ont apprécié le film. Parmi ceux qui ont apprécié le film, 90% ont aimé les dialogues, et 25% des personnes qui n'ont pas apprécié le film ont quand même aimé les dialogues.
Calculer la proportion de spectateurs qui ont aimé les dialogues.

Exemple 1

$75\% = 0,75$, donc on calcule
 $800 \times 0,75 = 600$ pommes vertes récoltées.

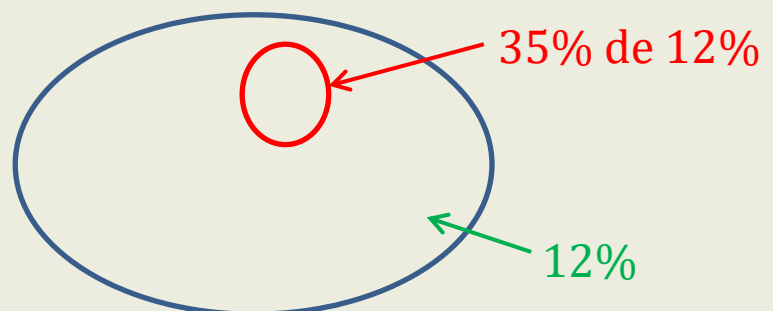
Sur ces 600 pommes vertes, 2% présentent un défaut, or
 $600 \times 0,02 = 12$

On a donc récolté **12** pommes vertes présentant un défaut.



Exemple 2

On doit calculer 12% de 35%, ce qui revient à multiplier les proportions.
 $0,12 \times 0,35 = 0,042$, donc **4,2%** des élèves du lycée sont en alternance.

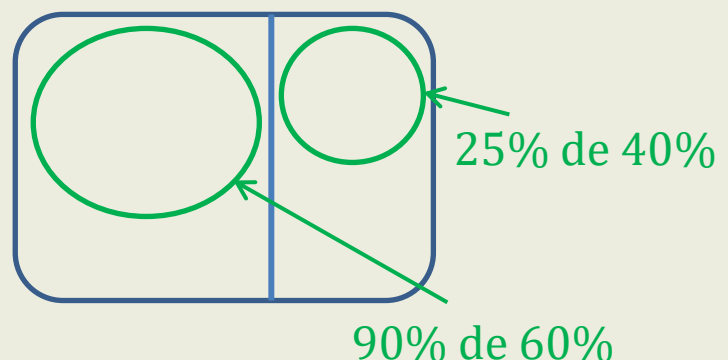


Exemple 3

- Parmi les 60% des spectateurs ayant apprécié le film, 90% ont aimé les dialogues. Or $0,6 \times 0,9 = 0,54$, donc **54%** des spectateurs ont apprécié le film et aimé les dialogues.

- Il reste 40% de personnes qui n'ont pas apprécié le film, mais 25% d'entre elles ont quand même aimé les dialogues. Or $0,4 \times 0,25 = 0,1$, donc **10%** des spectateurs n'ont pas aimé le film mais ont aimé les dialogues

- Ainsi, $0,54 + 0,1 = 0,64 = \mathbf{64\%}$ des spectateurs ont aimé les dialogues.



3b. Fréquences conditionnelles

On doit parfois rechercher une proportion parmi une partie qui vérifie une condition. Cela s'appelle une **fréquence conditionnelle**.

Exemple 1 Le tableau suivant détaille les boîtes vendues par un chocolatier lors d'un salon du chocolat.

a. Compléter le tableau.

Les réponses sont à arrondir à l'unité.

b. Quelle est le pourcentage de boîtes vendues le samedi par rapport au total ?

c. Quelle est la proportion de boîtes de chocolat noir parmi les boîtes vendues le samedi ?

d. Quelle est la proportion de boîtes de chocolat pralinés vendues le samedi parmi le total de boîtes vendues ?

	Samedi	Dimanche	Total
Chocolat noir	45	68	
Chocolat praliné	80		
Total		165	

Exemple 2

La tableau ci-contre donne la répartition des étudiants en France selon le secteur et la formation au cours de l'année 2016-2017.

a. Compléter le tableau.

b. Quelle est la fréquence des étudiants en CPGE dans le privé ? Donner le pourcentage arrondi à 0,1%.

c. Quelle est la proportion des étudiants du public parmi les BTS ? Donner la réponse arrondie à 0,01%.

d. Quelle est la proportion des étudiants de BTS dans le public ? Donner la réponse arrondie à 0,1%.

Effectifs (en milliers)	Public	Privé	Total
Universités	1 624		1 624
BTS et assimilés	173		257
CPGE		12	86
Autres	264	379	643
Total	2 135		2 610

Exemple 1

a.

	Samedi	Dimanche	Total
Chocolat noir	45	68	113
Chocolat praliné	80	97	177
Total	125	165	290

b. Au total, 125 boîtes ont été vendus le samedi, ce qui représente $\frac{125}{290} \approx 0,43 \approx 43\%$.

c. Attention, ici on demande une **fréquence conditionnelle**, uniquement **parmi les boîtes vendues le samedi**. L'effectif total est donc le nombre de boîtes vendues le samedi, c'est-à-dire 125.

Sur les 125 boîtes vendues le samedi, 45 contiennent du chocolat noir, ce qui représente $\frac{45}{125} = 0,36 = 36\%$ des boîtes vendues le samedi.

d. Sur les 290 boîtes vendues au total, 80 sont des boîtes de chocolats pralinés vendues le samedi, ce qui représente $\frac{80}{290} \approx 0,28 \approx 28\%$ du total.

Exemple 2

a.

Effectifs (en milliers)	Public	Privé	Total
Universités	1 624	0	1 624
BTS et assimilés	173	84	257
CPGE	74	12	86
Autres	264	379	643
Total	2 135	475	2 610

b. On demande une **fréquence conditionnelle**, uniquement parmi les étudiants du privé.

Un arrondi à **0,1%** signifie que l'on souhaite un chiffre après la virgule dans le pourcentage. Il nous faut donc **trois** chiffres après la virgule dans le nombre décimal. Sur les 475 milliers d'étudiants du privé, 12 sont en CPGE,

ce qui représente $\frac{12}{475} \approx 0,025 \approx \mathbf{2,5\%}$ des étudiants du privé.

c. Un arrondi à **0,01%** signifie que l'on souhaite un chiffre après la virgule dans le pourcentage. Il nous faut donc **quatre** chiffres après la virgule dans le nombre décimal. Sur les 257 milliers d'étudiants en BTS, 173 sont dans le public,

ce qui représente $\frac{173}{257} \approx 0,6732 \approx \mathbf{67,32\%}$ des étudiants de BTS.

d. Sur les 2 135 milliers d'étudiants du public, 173 sont en BTS,

ce qui représente $\frac{173}{2\,135} \approx 0,081 \approx \mathbf{8,1\%}$ des étudiants du public.