Chapitre 8 – Probabilités et variables aléatoires

1. Probabilités, arbres

1a. Rappels

Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $p_B(A)$, la probabilité que A se réalise si on suppose que B est réalisé. On a :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Attention : Ne pas confondre $p_B(A)$ avec $p(A \cap B)$, qui est la probabilité que A et B soient réalisés ensemble.

Exemple 1 Un magasin d'électroménager dispose de différents appareils. Le tableau suivant indique le nombre d'objets produits dans chaque pays. Un client gagne un produit tiré au sort dans ce magasin. On considère :

	Machine à laver	Sèche-linge	Grille-pain
Allemagne	230	70	40
Chine	180	15	120
Japon	50	300	240

L : « L'appareil est une machine à laver » ; S : « L'appareil est un sèche-linge. » ; C : « L'appareil vient de Chine »

a. Quel est le nombre total d'appareils ? **b.** Calculer $p(L)$ et $p(C)$.

c. Calculer $p(L \cap C)$ et $p(S \cap \bar{C})$. **d.** Calculer $p_L(C)$; $p_C(L)$ et $p_C(\bar{S})$;

Exemple 2 Une entreprise vend 1 000 vélos électriques disponibles en deux modèles : « Agile » et « Baroudeur ». Chaque modèle peut être équipé en option d'un pack « Confort ».
On sait que : • 70 % des vélos sont « Agile » ;
• parmi les vélos « Agile », 52 % sont vendus avec pack « Confort » ;
• parmi les vélos « Baroudeur », 12 % sont vendus avec pack « Confort ».

Pack \ Modèle	Agile	Baroudeur	Total
Aucun			
Confort	364		
Total	700		1 000

1. Recopier et compléter le tableau.
2. Un salarié choisit au hasard le bon de commande d'un vélo. On définit les évènements suivants :
• A : « Le bon de commande concerne un vélo du modèle « Agile » ;
• B : « Le bon de commande concerne un vélo du modèle « Baroudeur » ;
• C : « Le bon de commande concerne un vélo équipé en option du pack « Confort ».
a. Calculer la probabilité que le bon de commande concerne un vélo du modèle « Agile » avec pack « Confort ».
b. Vérifier que $p(C) = 0{,}404$. **c.** Calculer $p_C(B)$ et $p_A(\bar{C})$. Que représentent ces probabilités ?

Exemple 1

a. On additionne tous les appareils :
$230 + 70 + 40 + 180 + 15 + 120 + 50 + 300 + 240 = \mathbf{1\,245}$.

b. • Le nombre de machines à laver est $230 + 180 + 50 = 360$.
Ainsi, $p(L) = \dfrac{360}{1\,245} \approx \mathbf{29}\%$.

• Le nombre d'appareils fabriqués en Chine est $180 + 15 + 120 = 315$.

Ainsi, $p(C) = \frac{315}{1\,245} \approx \mathbf{25}\%$.

c. • Le nombre de machines à laver fabriquées en Chine est 180.

Ainsi, $p(L \cap C) = \frac{180}{1\,245} \approx \mathbf{14}\%$.

• Le nombre de sèche-linges non fabriqués en Chine est $70 + 300 = 370$.

Ainsi, $p(S \cap \bar{C}) = \frac{370}{1\,245} \approx \mathbf{30}\%$.

d. • $p_L(C) = \frac{p(L \cap C)}{p(L)} = \frac{180}{360} = \mathbf{50\%}$

• $p_C(L) = \frac{p(L \cap C)}{p(C)} = \frac{180}{315} \approx \mathbf{57\%}$

• Le nombre d'appareils qui ne sont pas des sèche-linges fabriqués en Chine est $180 + 120 = 300$.

• $p_C(\bar{S}) = \frac{p(\bar{S} \cap C)}{p(C)} = \frac{300}{315} \approx \mathbf{95\%}$

Exemple 2

1. *On complète d'abord plusieurs cases par soustractions.*

$0{,}12 \times 300 = \mathbf{40}$, donc on compte 40 vélos Baroudeur avec pack Confort.

On termine le tableau par d'autres additions et soustractions.

	Agile	Baroudeur	Total
Aucun	**336**	**260**	**596**
Confort	364	**40**	**404**
Total	700	**300**	1 000

2a. On compte 364 vélos Agile avec pack Confort.

$p(A \cap C) = \frac{364}{1\,000} = 0{,}364 = \mathbf{36,4}\%$

2b. D'après le tableau, 404 vélos sont vendus avec le pack Confort.

$p(C) = \frac{404}{1\,000} = \mathbf{0,404}$.

2c. • $p_C(B) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{40}{404} \approx \mathbf{10}\%$. Il s'agit de la probabilité de choisir un bon de commande d'un **Baroudeur parmi les bons avec le pack Confort**.

• $p_A(\bar{C}) = \frac{p(A \cap \bar{C})}{p(A)} = \frac{346}{700} \approx \mathbf{49}\%$. Il s'agit de la probabilité de choisir un bon de commande **sans pack Confort parmi les bons Agile**.

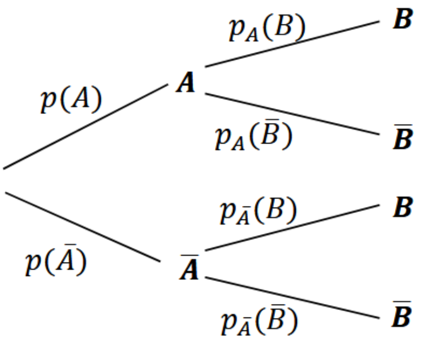
1b. Arbres de probabilité

Quand une situation comporte plusieurs tirages, on la représente par un arbre. Sur les branches du « deuxième niveau » de l'arbre, on écrit des probabilités conditionnelles.

Arbres de probabilité

• La **somme des probabilités** partant d'un même événement est toujours **1**.

• Si on **multiplie les probabilités du « parcours d'arbre »** A puis B, on trouve la probabilité de l'intersection : $\boldsymbol{p(A \cap B)}$.



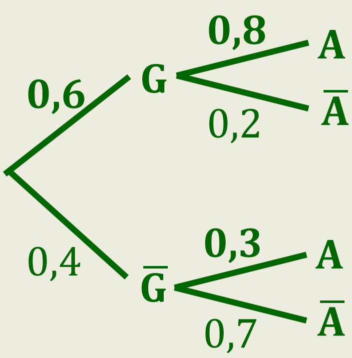
$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$

Exemple 1 Dans un lycée, 60 % des élèves ont une calculatrice graphique dont 80% sont de marque A.
Les autres ont une calculatrice scientifique, dont 30% sont de marque A.
On emprunte la calculatrice d'un élève au hasard et on considère les événements suivants :
• G : « Sa calculatrice est graphique. » • A : « Sa calculatrice est de marque A »
a. Réaliser un arbre pondéré, puis calculer $p(G \cap A)$.
b. Quelle est la probabilité que la calculatrice tirée soit une calculatrice scientifique d'une autre marque que A ?

Exemple 2 Lors d'une enquête auprès de saisonniers dans une station balnéaire on a interrogé 700 hommes et 1 300 femmes afin de répertorier leur secteur d'activité.
15 % des hommes travaillent dans le secteur agricole, 60 % dans la restauration, les autres dans l'animation.
5% des femmes travaillent dans le secteur agricole, 55% dans la restauration, les autres dans l'animation.
On choisit au hasard un saisonnier. On note s'il s'agit d'un homme ou d'une femme, puis on note son secteur.
a. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
b. Quelle est la probabilité de choisir une femme travaillant dans la restauration ?
c. Quelle est la probabilité de choisir une personne travaillant dans le secteur agricole ?

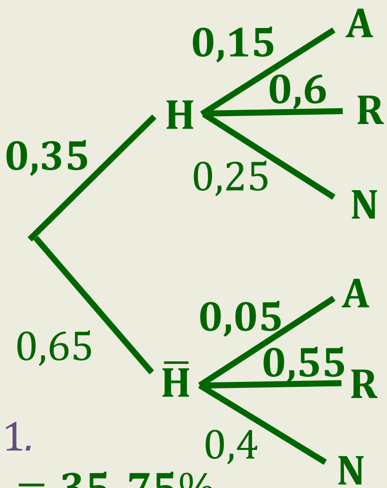
Exemple 1

a. Pour réaliser l'arbre, il faut « traduire » les données de l'énoncé en probabilité.



Les 60% d'élèves qui ont une calculatrice graphique nous disent que $\mathbf{p(G) = 0,6}$.
Parmi celles-ci, 80% sont de marque A, donc $\mathbf{p_G(A) = 0,8}$.
Enfin, 30% des non-graphiques sont A : $\mathbf{p_{\bar{G}}(A) = 0,3}$
*Pour compléter l'arbre, on n'oublie pas que la **somme des probabilités** partant d'un même événement doit être* **1**.
Par exemple $\mathrm{p}(\bar{\mathrm{G}}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
Enfin, $p(\mathrm{G} \cap \mathrm{A})$ *s'obtient en **multipliant les probabilités sur les branches** :*
$p(G \cap A) = p(G) \times p_G(A) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48 = \mathbf{48\%}$
b. $p(\bar{G} \cap \bar{A}) = p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(\bar{A}) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28 = \mathbf{28\%}$

Exemple 2



a. On appelle H l'événement « choisir un homme »,
A « choisir un saisonnier du secteur agricole »,
R « choisir un saisonnier en restauration »,
et N « choisir un saisonnier en animation ».
L'énoncé fournit $\mathrm{p(H)} = \mathbf{0,35}$, $\mathrm{p_H(A)} = \mathbf{0,15}$,
et $\mathrm{p_H(R)} = \mathbf{0,6}$, *puis* $\mathrm{p_H(A)} = \mathbf{0,15}$ *et* $\mathrm{p_H(R)} = \mathbf{0,6}$.
On trouve tout le reste en se servant de la somme des probabilités partant d'un même événement égale à 1.

b. $p(\overline{H} \cap R) = p(\overline{H}) \times p_{\overline{H}}(R) = 0{,}65 \times 0{,}55 = 0{,}357\,5 = \mathbf{35,75\%}$

c. $p(A)$ n'est pas directement donnée, mais choisir une personne travaillant dans le secteur agricole revient à choisir soit un homme, soit une femme y travaillant.
On peut additionner ces deux probabilités.
Calculons $p(H \cap A) = p(H) \times p_H(A) = 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}052\,5$
et $p(\overline{H} \cap A) = p(\overline{H}) \times p_{\overline{H}}(A) = 0{,}65 \times 0{,}05 = 0{,}032\,5$
Enfin, $p(A) = p(H \cap A) + p(\overline{H} \cap A) = 0{,}052\,5 + 0{,}032\,5 = 0{,}085 = \mathbf{8,5\%}$

2. Variables aléatoires

2a. Définition

On définit une variable aléatoire X quand à toute issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel.

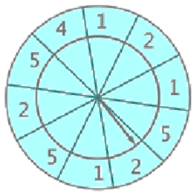
Exemple 1 On fait tourner la roue ci-contre.

• Si on obtient un nombre pair, on gagne le triple en euros du nombre indiqué.

• Sinon, on gagne en euros le double du nombre indiqué.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain en euros.

Quelles sont les valeurs possibles pour X ?



Exemple 2 On lance deux pièces. Pour chaque « pile », on gagne 5€. Pour chaque « face », on perd 3€.

Soit G la variable aléatoire représentant le gain en euros. Quelles sont les valeurs possibles ?

Exemple 1

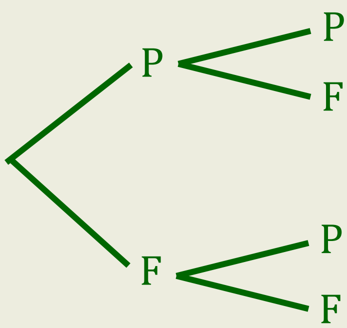
Si on obtient un nombre pair, cela peut être 2 ou 4. Les gains sont alors de 6€ ou de 12€.

Si on obtient un nombre impair, cela peut être 1 ou 3. Les gains sont alors de 2€ ou de 6€.

Ainsi, les valeurs possibles pour X sont **2 ; 6 ou 12**.

Exemple 2

Étant donné qu'on lance deux pièces, on peut représenter la situation par un arbre :



• si on tire deux « pile », on gagne 10€.

• si on tire un « pile » et un « face », on gagne 5€ et on perd 3€, ce qui nous laisse 2€

• si on tire deux « face », on perd 6€.

Les valeurs possibles pour G sont **10 ; 2 et -6**.

2b. Loi de probabilité

Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner la probabilité de chaque valeur possible de X.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente souvent sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Valeurs possibles
(ici, il y en a 5)
Probabilités de ces valeurs
(leur somme doit être égale à 1)

Exemple 1 Le restaurant Mirabelle propose un menu du jour tous les midis. Sur les cinq années passées, 30 % des clients du midi prennent uniquement le plat du jour à 15 €, 45 % des clients du midi prennent le menu « plat + dessert du jour » à 20 €, les autres clients du midi choisissent la formule complète à 28 €.
On interroge un client du midi choisi au hasard dans ce restaurant. On note X la variable aléatoire égale au prix dépensé par le client interrogé. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exemple 2 Une usine fabrique des pièces métalliques pour l'industrie automobile. On prélève un échantillon de 250 pièces métalliques dans le stock parmi lesquelles :
• 6% des pièces présentent un défaut de forme.
• 20 pièces présentent un défaut de couleur dont la moitié présente aussi un défaut de forme.
1. Compléter le tableau croisé d'effectifs.

	Avec le défaut de couleur	Sans le défaut de couleur	Total
Avec le défaut de forme			
Sans le défaut de forme			
Total			250

2. Le coût de fabrication d'une pièce métallique est de 180€. Afin de ne pas mettre au rebut les pièces non conformes, il est possible de les réparer selon les tarifs ci-dessous : 30€ pour réparer le seul défaut de couleur ; 50€ pour réparer le seul défaut de forme ; 70€ pour réparer les deux défauts.
On note C la variable aléatoire qui, à chaque pièce métallique prélevée, associe le coût de fabrication d'une pièce métallique, avec les éventuelles réparations. Donner la loi de probabilité de C.

Exemple 1 *Déterminer la loi de probabilité de X, c'est donc dresser un tableau avec tous les prix possibles (ici 15 €, 20 € ou 28 €) et les probabilités correspondantes (ici, les pourcentages données).*

x_i	**15**	**20**	**28**
$p(X = x_i)$	**0,3**	**0,45**	**0,25**

On trouve le 0,25 car la somme de toutes les probabilités doit être 1.

Exemple 2
1. $0{,}06 \times 250 = 15$, *et d'après l'énoncé, sur les 20 pièces présentant un défaut de forme, 10 présentent aussi un défaut de couleur. On peut alors tout compléter.*

	Défaut de couleur	Sans défaut de couleur	Total
Défaut de forme	**10**	**5**	**15**
Sans défaut de forme	**10**	**225**	**235**
Total	**20**	**230**	250

2. La variable C peut prendre quatre valeurs.

• 180€ si la pièce n'a aucun défaut. La probabilité est $\frac{225}{250} = 0{,}90$.

• $180 + 30 = 210$€ si la pièce n'a que le défaut de couleur.

La probabilité est $\frac{10}{250} = 0{,}04$.

• $180 + 50 = 230$€ si la pièce n'a que le défaut de forme.

La probabilité est $\frac{5}{250} = 0{,}02$.

• $180 + 70 = 250$€ si la pièce a les deux défauts.

La probabilité est $\frac{10}{250} = 0{,}04$.

On peut maintenant établir la loi :

c_i	**180**	**210**	**230**	**250**
$p(C = c_i)$	**0,9**	**0,04**	**0,02**	**0,04**

On vérifie que la somme des probabilités est bien 1.

2c. Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs possibles, pondérées par leur probabilité.

Pour trouver l'espérance d'une variable aléatoire, on **multiplie chaque valeur possible par sa probabilité**, et on calcule **la somme des résultats**.
Ici par exemple, $\boldsymbol{E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3}$.

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	x_3
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	p_1	p_2	p_3

Exemple 1 Un revendeur de téléphones portables commande 800 téléphones suivant la répartition :
- 156 téléphones avec écran de 6,4" et 128 Go ;
- 112 téléphones avec écran de 5,8" et 128 Go ;
- 84 téléphones avec écran de 6,4" et 256 Go ;
- 448 téléphones avec écran de 5,8" et 256 Go ;

Le modèle avec un écran de 5,8 pouces et une mémoire de 128 Go coûte 250 €.
Le choix d'un écran de 6,4 pouces entraîne une majoration du prix de 70 € et le choix de la mémoire 256 Go entraîne une majoration de 50 €. On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone, associe son prix.
Donner la loi de X, puis calculer son espérance.

Exemple 2 Une association organise un week-end dans un parc à thème. Pour les membres de l'association qui s'inscrivent, deux formules ont été proposées : la formule A pour 80€, et la formule B pour 100€.
40% des inscrits choisissent la formule A.
Un spectacle facultatif est aussi proposé pour un coût supplémentaire de 20€.
Quelle que soit la formule, 80% des inscrits optent pour ce spectacle facultatif.
On interroge au hasard une personne inscrite à ce voyage. On note :
- A l'évènement « La personne a choisi la formule A »
- B l'évènement « La personne a choisi la formule B »
- S l'évènement « La personne a choisi d'assister au spectacle »

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. On note V la variable aléatoire égale au coût total du voyage (spectacle compris).
Déterminer la loi de probabilité de V. Calculer son espérance et interpréter ce résultat.

Exemple 1

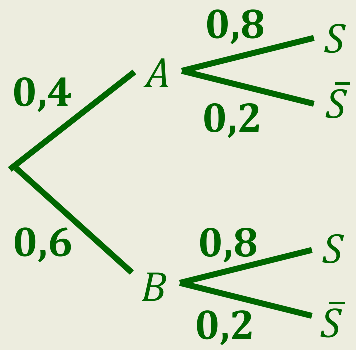
La variable X peut prendre 4 valeurs :
- 250 € pour un 5,8" avec 128 Go. La probabilité est $\dfrac{112}{800} = 0{,}14$.
- $250 + 50 = 300$ € pour un 5,8" avec 256 Go. La probabilité est $\dfrac{448}{800} = 0{,}56$.
- $250 + 70 = 320$ € pour un 6,4" avec 128 Go. La probabilité est $\dfrac{156}{800} = 0{,}195$.
- $250 + 120 = 370$ € pour un 6,4" avec 256 Go. La probabilité est $\dfrac{84}{800} = 0{,}105$.

On établit la loi :

x_i	**250**	**300**	**320**	**370**
$p(X = x_i)$	**0,14**	**0,56**	**0,195**	**0,105**

On calcule l'espérance en multipliant chaque prix par sa probabilité.
$E(X) = 250 \times 0{,}14 + 300 \times 0{,}56 + 320 \times 0{,}195 + 370 \times 0{,}105 = \mathbf{304{,}25}$
Ainsi, les téléphones de ce stock coûtent en moyenne 304,25 €.

Exemple 2



1. Notez que dans cette situation, la probabilité qu'un inscrit choisisse le spectacle S ne dépend pas de son choix de formule A ou B, autrement dit, $p_A(S) = p_B(S) = 0{,}8$. On dit que S est indépendant des événements A et B.

2. La variable V peut prendre 3 valeurs :

• 80 € pour la formule A sans spectacle.

La probabilité est $p(A \cap \bar{S}) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$.

• 100 € pour la formule B sans spectacle, ou la formule A avec spectacle.

$p(B \cap \bar{S}) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$ et $p(A \cap S) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$.

Donc la probabilité que le coût du voyage soit 100 € est $0{,}12 + 0{,}32 = 0{,}44$.

• 120 € pour la formule B avec spectacle.

La probabilité est $p(B \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$.

On peut maintenant donner la loi de probabilité :

v_i	**80**	**100**	**120**
$p(V = v_i)$	**0,08**	**0,44**	**0,48**

L'espérance est : $E(V) = 80 \times 0{,}08 + 100 \times 0{,}44 + 120 \times 0{,}48 = \mathbf{108}$.

Cela signifie que le **prix moyen d'un voyage** est 108 €.

2d. Calculs de probabilités

La loi de probabilité d'une variable X permet de calculer des probabilités d'événements de la forme $p(X = k)$ ou $p(X \leq k)$.

Lorsqu'une loi de probabilité est donnée sous la forme d'un tableau :
Pour calculer des probabilités $\boldsymbol{p(X = k)}$ ou $\boldsymbol{p(X \leq k)}$, on **additionne les probabilités correspondantes**.

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	$\boldsymbol{p_3}$

Exemple Une usine vend des pièces pour appareils électroménagers. Certaines pièces ayant des défauts, leur prix de vente est réduit. On tire au hasard une pièce à vendre et on appelle X son prix de vente. On donne la loi de X.

x_i	10	12	15	20
$p(X = x_i)$	0,006	0,031	…	0,942

1. Calculer la probabilité manquante.
2. Donner $p(X = 12)$ et calculer $p(X \leq 15)$.
3. Exprimer la probabilité que le prix de vente soit strictement supérieur à 13 à l'aide de la variable aléatoire X, puis calculer cette probabilité.
4. Calculer $E(X)$.

1. La somme des probabilités doit être 1. On calcule donc :
$p(X = 15) = 1 - (0{,}006 + 0{,}031 + 0{,}942) = 1 - 0{,}979 = \mathbf{0{,}021}$.
2. • $p(X = 12)$ se lit directement dans le tableau, c'est **0,031**.
• On calcule $p(X \leq 15)$ en additionnant les trois probabilités correspondantes :
$p(X \leq 15) = p(X = 10) + p(X = 12) + p(X = 15)$
$p(X \leq 15) = 0{,}006 + 0{,}031 + 0{,}021$
$p(X \leq 15) = \mathbf{0{,}058}$
3. La probabilité demandée s'écrit $p(X > 13)$.
On additionne les deux probabilités correspondantes :
$p(X > 13) = p(X = 15) + p(X = 20)$
$p(X > 13) = 0{,}021 + 0{,}942$
$p(X > 13) = \mathbf{0{,}963}$
4. $E(X) = 10 \times 0{,}006 + 12 \times 0{,}031 + 15 \times 0{,}021 + 20 \times 0{,}942 = \mathbf{19{,}587}$

3. Loi de Bernoulli, répétition

3a. Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues :

- S que l'on nomme « succès », de probabilité p
- $\bar{S}$ que l'on nomme « échec », de probabilité $(1-p)$.

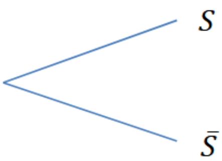
Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si elle ne prend que deux valeurs :

- 1 en cas de succès, avec probabilité p
- 0 en cas d'échec avec probabilité $(1-p)$

Une **épreuve de Bernoulli** peut donc s'assimiler à un **pile ou face** avec une pièce éventuellement **non-équilibrée**.

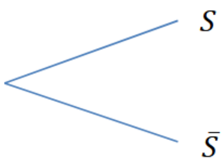
Exemple 1 Dans chaque cas, le paramètre p d'une épreuve de Bernoulli est donné.
Compléter l'arbre et la loi de la variable X associée.

$\boldsymbol{p = 0,3}$



x_i		
$p(X = x_i)$		

$\boldsymbol{p = 0,724}$



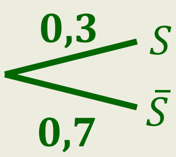
x_i		
$p(X = x_i)$		

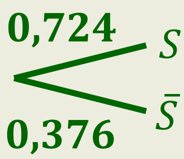
Exemple 2 On tire une boule dans une urne, comportant 3 boules vertes et 12 boules rouges.
On gagne si la boule tirée est verte.
Est-ce-que cela correspond à une épreuve de Bernoulli ? Si oui, préciser le paramètre.

Exemple 3 Pendant un cours d'anglais, un professeur interroge un élève au hasard dans une classe de 14 filles et 11 garçons. Si on considère l'événement F : « interroger une fille », est-ce-que cela correspond à une épreuve de Bernoulli ? Si oui, préciser le paramètre, réaliser l'arbre et donner la loi de la variable X associée.

Exemple 4 Fiona joue à Pierre-Feuille-Ciseaux.
Peut-on assimiler le choix de son adversaire à une épreuve de Bernoulli ?

Exemple 1





x_i	**0**	**1**
$p(X = x_i)$	$\mathbf{0,7}$	$\mathbf{0,3}$

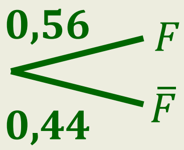
x_i	**0**	**1**
$p(X = x_i)$	$\mathbf{0,376}$	$\mathbf{0,724}$

Exemple 2
Il s'agit bien d'une **épreuve de Bernoulli** car cette expérience n'a que **deux issues** (boule verte, ou boule rouge).

Le paramètre p est la probabilité de tirer une boule verte : $p = \frac{3}{15} = \mathbf{0,2}$

Exemple 3
Il s'agit bien d'une **épreuve de Bernoulli** car cette expérience n'a que **deux issues** (fille ou garçon).

Le paramètre p est la probabilité d'interroger une fille : $p = \frac{14}{25} = \mathbf{0,56}$



x_i	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$p(X = x_i)$	$\mathbf{0,44}$	$\mathbf{0,56}$

Exemple 4
Ce n'est **pas une épreuve de Bernoulli** car cette expérience a **trois issues** : pierre, feuille ou ciseaux.

3b. Répétition d'épreuves

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On les représente par un arbre.

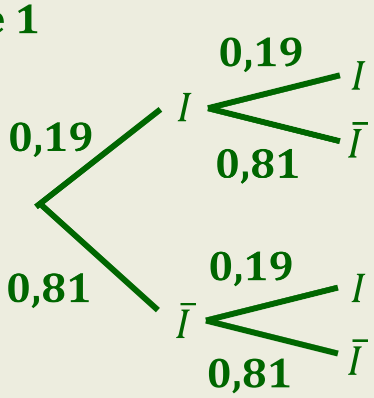
Exemple 1 La probabilité qu'un appel aux pompiers soit injustifié est 0,19.
Lors d'une journée, deux appels sont passés les uns après les autres.
a. Réaliser un arbre pondéré d'après la situation.
b. Quelle est la probabilité que les deux appels soit injustifiés ?
c. Quelle est la probabilité qu'un seul appel sur les deux soit injustifié ?

Exemple 2 Sur les 1 200 élèves d'un lycée, 180 élèves pratiquent une activité sportive.
On interroge trois élèves au hasard.
a. Représenter la situation par un arbre.
b. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne pratique d'activité sportive ?
c. Quelle est la probabilité qu'exactement un élève pratique une activité sportive ?

Exemple 3 On considère une importante livraison de sacs à destination d'une chaine de supermarchés. On prélève au hasard 4 sacs. On admet que dans la production de cette entreprise, 3 % des sacs présentent un défaut. Calculer la probabilité que parmi les 4 sacs prélevés, aucun ne présente de défaut.
Le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au millième.

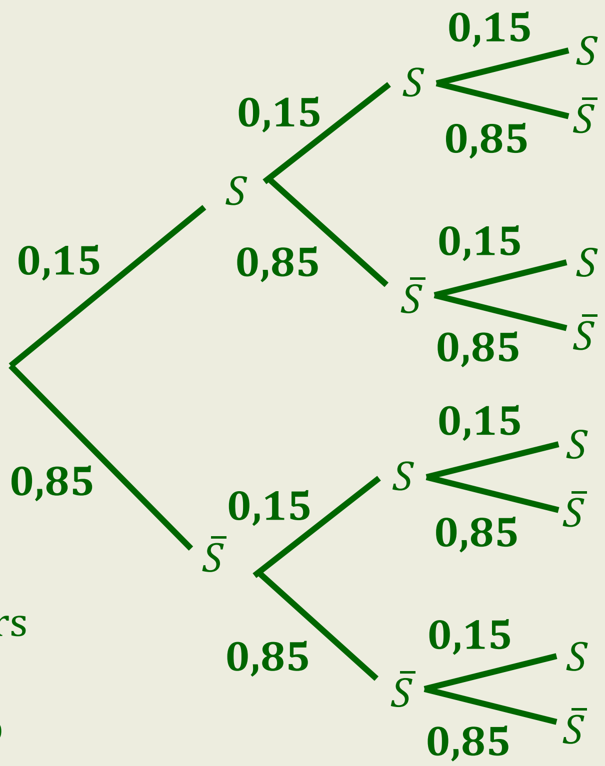
Exemple 1

a.



b. La probabilité que les deux appels soient injustifiés revient à suivre le parcours « I puis I » dans l'arbre. On multiplie les deux probabilités sur les branches :
$0{,}19 \times 0{,}19 = 0{,}036\,1 = \mathbf{3,61}\%$
c. La probabilité qu'un seul appel soient injustifié correspond à **deux parcours** :
« I puis $\bar{I}$ » mais aussi « $\bar{I}$ puis I ».
On additionne donc la probabilité de ces deux parcours :
$0{,}19 \times 0{,}81 + 0{,}81 \times 0{,}19$
$= 0{,}158\,9 + 0{,}158\,9$
$= 0{,}307\,8$
$= \mathbf{30,78}\%$

Exemple 2

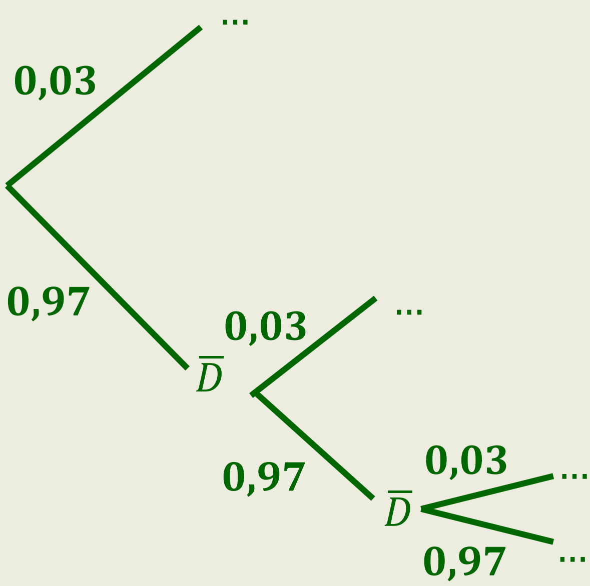


a. La probabilité qu'un élève interrogé pratique une activité sportive est $p = \frac{180}{1\,200} = \mathbf{0,15}$.
C'est la probabilité de « succès » du schéma de Bernoulli.
On construit donc un arbre à trois répétitions.
En général, on n'a pas besoin d'écrire les probabilités sur toutes les branches comme ci-contre, car elles sont identiques.

b. Cette probabilité correspond au parcours « $\bar{S}$ puis $\bar{S}$ puis $\bar{S}$ » dont la probabilité est $0{,}85 \times 0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}85^3 \approx 0{,}61 \approx$ **61%**

c. Cette probabilité correspond à trois parcours (tous de même probabilité) avec un S et deux $\bar{S}$, par exemple « $\bar{S}$ puis S puis $\bar{S}$ ». On ajoute donc ces trois probabilités :
$0{,}15 \times 0{,}85 \times 0{,}85 + 0{,}85 \times 0{,}15 \times 0{,}85 + 0{,}85 \times 0{,}85 \times 0{,}15 \approx$ **32%**

Exemple 3



Il faudrait tracer un arbre avec 4 répétitions, ce qui est beaucoup trop long.
Mais comme on nous demande la probabilité qu'aucun sac ne présente de défaut, on peut se contenter d'imaginer l'arbre comme ci-contre.
La probabilité de n'avoir que des sacs sans défaut correspond donc au parcours « tout en bas », qui ne passe que par des $\overline{D}$.

La probabilité qu'aucun sac ne présente de défaut sur les 4 sacs prélevés est :
$0{,}97 \times 0{,}97 \times 0{,}97 \times 0{,}97 = 0{,}97^4 \approx \mathbf{0,885}$ (arrondie au millième comme demandé).

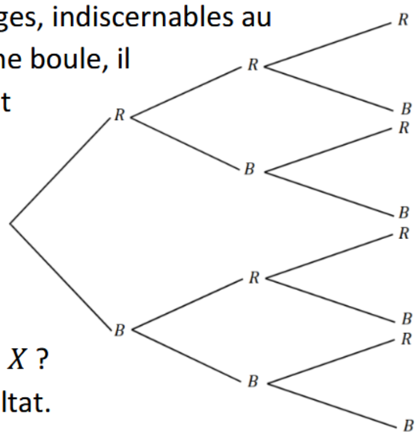
3c. Répétitions et variables aléatoires

Lorsqu'on répète n épreuves de Bernoulli, le nombre N de succès est une variable aléatoire, comprise entre 0 et n.

Exemple 1 Lorsqu'il fait ses devoirs, Ismaël n'éteint jamais son téléphone. Quand il reçoit un message, il y a 64% de probabilité qu'il le regarde. Pendant tout le temps qu'il a consacré à ses devoirs, il a reçu 3 messages. Soit N le nombre de messages qu'Ismaël a regardés.

a. Réaliser un arbre pondéré d'après la situation. **b.** Calculer $p(N = 3)$, puis calculer $p(N = 2)$.

Exemple 2 On considère une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges, indiscernables au toucher. On réalise l'épreuve aléatoire suivante : un joueur pioche au hasard une boule, il note sa couleur, puis la remet dans l'urne. On décide de répéter successivement trois fois cette épreuve aléatoire.



1. Représenter cette situation par un arbre comme ci-contre.

2. À l'issue des 3 tirages, le joueur gagne 5 euros pour chaque boule rouge obtenue, et il perd 3 euros pour chaque boule blanche obtenue.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en euro.

a. Si on pioche deux boules rouges et une boule blanche, quelle est la valeur de X ?

b. Donner la loi de probabilité de X. **c.** Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.

Exemple 3 La probabilité de crevaison d'un pneu (avant ou arrière) sur un parcours de vélo est égale à 0,02. On note C l'évènement "un pneu a crevé sur une section du parcours".

1. **a.** Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Déterminer la probabilité d'avoir deux pneus crevés lors de ce parcours.

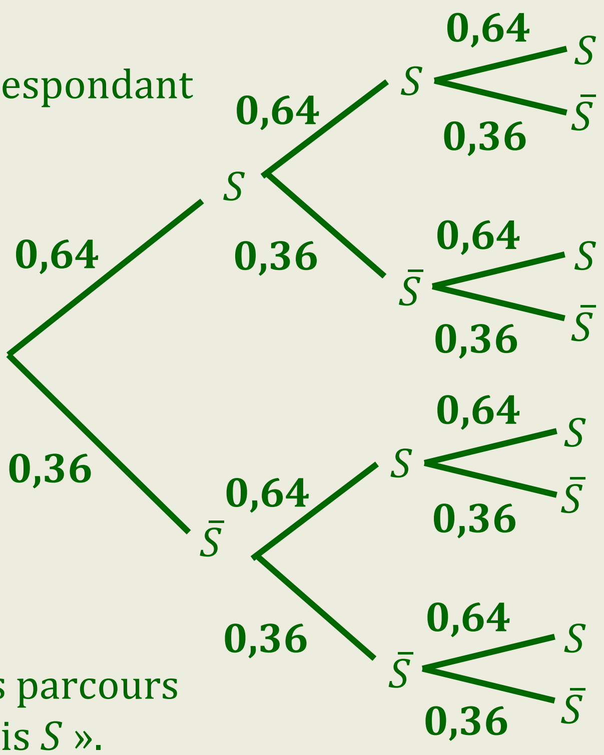
2. Mathys s'entraîne sur ce parcours quatre fois par semaine ; le matériel de réparation pour un pneu lui coûte 7 €. On note X la variable aléatoire égale à la somme dépensée en réparation sur un trajet en vélo.

a. Donner la loi de probabilité de la variable X et calculer son espérance.

b. En déduire le budget que doit prévoir Mathys sur une année pour réparer ses éventuelles crevaisons.

Exemple 1

a. On réalise l'arbre ci-contre (le « succès » correspondant au fait qu'Ismaël regarde un message).



b.

• $p(N = 3)$ est la probabilité qu'il regarde les trois messages, ce qui correspond au parcours « S puis S puis S ».

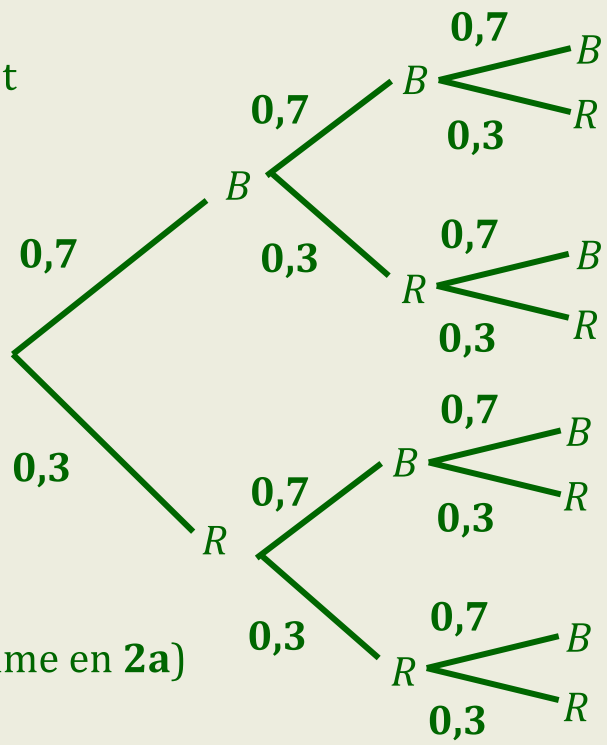
$p(N = 3) = 0{,}64 \times 0{,}64 \times 0{,}64 \approx \mathbf{26\%}$

• $p(N = 2)$ est la probabilité qu'il regarde deux messages sur les trois, ce qui correspond à trois parcours de même probabilité, par exemple « S puis $\bar{S}$ puis S ».

$p(N = 2) = 0{,}64 \times 0{,}64 \times 0{,}36 + 0{,}64 \times 0{,}3 \times 0{,}64 + 0{,}36 \times 0{,}64 \times 0{,}64 \approx \mathbf{44\%}$

Exemple 2

1. La probabilité de tirer une boule blanche est
$p = \frac{7}{10} = \mathbf{0,7}$
On peut donc réaliser l'arbre ci-contre.



2a. Si on pioche deux boules rouges et une boule blanche, on perd $2 \times 3 = 6$€ mais on en regagne 5.
Ainsi, X vaut alors $-6 + 5 = -\mathbf{1}$€.

2b. Les valeurs possibles sont :
- **15€** (on tire 3 boules blanches)
- **7€** (on tire 2 boules blanches et 1 rouge)
- **-1€** (on tire 1 boule blanche et 2 rouges comme en **2a**)
- **-9€** (on tire 3 boules rouges)

Calculons les probabilités.
- La probabilité de gagner 15€ correspond au parcours « B puis B puis B ».

$p(X = 15) = 0,7 \times 0,7 \times 0,7 = \mathbf{0,343}$
- La probabilité de gagner 7€ correspond à trois parcours :

$p(X = 7) = 0,7 \times 0,7 \times 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,7 + 0,3 \times 0,7 \times 0,7 = \mathbf{0,441}$
- La probabilité de perdre 1€ correspond aussi à trois parcours :

$p(X = -1) = 0,7 \times 0,3 \times 0,3 + 0,3 \times 0,3 \times 0,7 + 0,3 \times 0,7 \times 0,3 = \mathbf{0,189}$
- La probabilité de perdre 9€ correspond au parcours « R puis R puis R ».

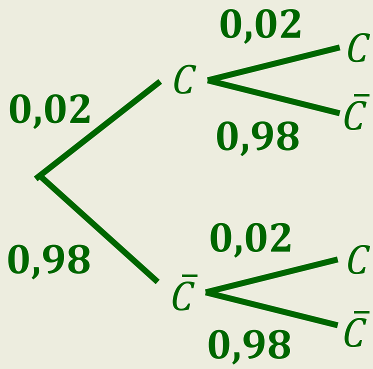
$p(X = -9) = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = \mathbf{0,027}$

x_i	**15**	**7**	**-1**	**-9**
$p(X = x_i)$	**0,343**	**0,441**	**0,189**	**0,027**

2c. $E(X) = 15 \times 0,343 + 7 \times 0,447 - 1 \times 0,189 - 9 \times 0,027 = \mathbf{7,8}$
Cela signifie qu'**en moyenne, on gagne 7,80€** en jouant à ce jeu.

Exemple 3

1a. Ci-contre.



1b. Il s'agit de la probabilité du parcours « C puis C »
$0{,}02 \times 0{,}02 = \mathbf{0{,}000\,4}$

2a. Sur un trajet, on peut dépenser :
• **14**€ pour deux crevaisons, c'est le cas dans la question **1b.** Ainsi $p(X = 14) = \mathbf{0{,}000\,4}$.
• **7**€ pour une seule crevaison, ce qui correspond aux parcours « C puis $\bar{C}$ » et « $\bar{C}$ puis C ». $p(X = 7) = 0{,}98 \times 0{,}02 + 0{,}02 \times 0{,}98 = \mathbf{0{,}039\,2}$
• **0**€ sans crevaison : $p(X = 0) = 0{,}98 \times 0{,}98 = \mathbf{0{,}960\,4}$

x_i	**14**	**7**	**0**
$p(X = x_i)$	**0,000 4**	**0,039 2**	**0,960 4**

$E(X) = 14 \times 0{,}000\,4 + 7 \times 0{,}039\,2 + 0{,}960\,4 = \mathbf{0{,}28}$
En moyenne, Mathys dépense donc 0,28 € par trajet.

2b. Une année comporte 52 semaines et Mathys s'entraîne 4 fois par semaine.
On calcule donc $4 \times 52 \times 0{,}28 = \mathbf{58{,}24}$€.