Chapitre 6 – Probabilités conditionnelles

1. Probabilités simples

1a. Probabilité d'un événement

Soit A un événement aléatoire. Sa probabilité, notée $p(A)$ ou $P(A)$, est un nombre compris entre 0 et 1.

Propriété : Si tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on parle d'équiprobabilité. Dans ce cas :

$$p(A) = \frac{\text{résultats correspondant à } A}{\text{résultats possibles}}$$

Exemple 1 On fait tourner la roue ci-contre.
Soient A : « *obtenir un nombre pair* » et B : « *obtenir un nombre supérieur ou égal à 2* »
Donner $p(A)$ et $p(B)$, sous forme de fraction simplifiée, de nombre décimal et de pourcentage.

Exemple 2 On réalise deux pile ou face d'affilée. **a.** Représenter la situation sous forme d'arbre.
b. Soient A : « obtenir deux pile » et B : « obtenir au moins un pile ». Donner $p(A)$ et $p(B)$.

Exemple 3 Un grossiste commande 1 000 poissons pêchés dans différentes mers.
On choisit un poisson au hasard. On note :
- D l'événement : « le poisson est une daurade »,
- A : « le poisson a été pêché en Atlantique »,
- M : « le poisson est un merlan ».

a. Calculer les effectifs marginaux.
b. Déterminer $p(A)$; $p(D)$ et $p(M)$ en pourcentage.

	Mer du Nord	Océan Atlantique	Mer Méditerranée	Total
Sardine	0	125	75	
Daurade	260	80	345	
Merlan	25	45	45	
Total				1 000

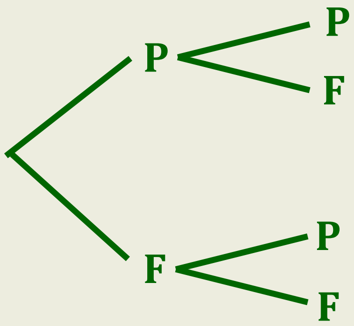
Exemple 1

• La roue est divisée en dix secteurs, et quatre de ces secteurs comportent un nombre pair. $p(A) = \frac{4}{10} = \mathbf{\frac{2}{5}} = \mathbf{0,4} = \mathbf{40\%}$

• Sept secteurs de la roue comportent un nombre supérieur ou égal à 2.
$p(B) = \mathbf{\frac{7}{10}} = \mathbf{0,7} = \mathbf{70\%}$

Exemple 2

a.



b. Il existe quatre parcours possibles.
L'événement A correspond à un seul parcours,
donc $p(A) = \mathbf{\frac{1}{4}}$
L'événement B correspond à trois parcours,
donc $p(B) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

Exemple 3

a.

	Mer du Nord	Océan Atlantique	Mer Méditer-ranée	Total
Sardine	0	125	75	**200**
Daurade	260	80	345	**685**
Merlan	25	45	45	**115**
Total	**285**	**250**	**465**	1 000

b.

• 250 poissons ont été pêchés dans l'Atlantique sur les 1 000 poissons, donc
$p(A) = \frac{250}{1\,000} = 0{,}25 = \mathbf{25}\%$

• 685 daurades ont été pêchées, donc $p(D) = \frac{685}{1\,000} = 0{,}685 = \mathbf{68,5}\%$

• 115 merlans ont été pêchés, donc $p(M) = \frac{115}{1\,000} = 0{,}115 = \mathbf{11,5}\%$

1b. Événement complémentaire

Le complémentaire d'un événement A, noté $\bar{A}$ (on lit « non-A ») est l'événement contraire de A.

Propriété : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple 1 On lance un D10 (un dé à 10 faces, numérotées de 1 à 10)

a. On considère A : *« obtenir 7 ou plus ». Donner* $\bar{A}$ et calculer $p(\bar{A})$.
b. On considère B : *« obtenir un multiple de 4 ». Donner* $\bar{B}$ et calculer $p(\bar{B})$.

Exemple 2 Le gérant d'un restaurant développe une nouvelle formule de restauration rapide le midi. Il propose un menu comprenant un plat et un dessert. Les clients ont le choix entre deux plats (viande ou poisson) et trois desserts (pâtisserie, laitage ou fruit). Il teste sa formule pendant un mois et étudie toutes les commandes pour mieux connaître les souhaits de sa clientèle.

- Parmi les 600 commandes faites au cours de ce mois, 72 % comprenaient un plat de viande.
- 45 % des clients ont pris une pâtisserie et, parmi eux, 44 avaient choisi le plat de poisson.
- Parmi les 138 commandes comprenant un fruit comme dessert, 73 comprenaient le plat de poisson.

1. Compléter le tableau d'effectifs.

	Pâtisserie	**Laitage**	**Fruit**	**Total**
Viande				
Poisson	44		73	
Total				600

On choisit une commande au hasard parmi celles faites pendant le mois de l'enquête. On note :
- A : l'événement « La commande comprend du poisson »
- B : l'événement « La commande comprend une pâtisserie »

2. Calculer la probabilité des événements A, B et $\bar{A}$.
3. Décrire l'événement $\bar{B}$ par une phrase, puis calculer $p(\bar{B})$.

Exemple 1
a. $\bar{A}$, le contraire de A, correspond à l'événement « obtenir moins de 7 ».
Ainsi, les issues de l'événement $\bar{A}$ sont : **{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}**.

Il y en a 6, donc $p(\bar{A}) = \frac{6}{10} = \mathbf{0,6}$

a. $\bar{B}$, le contraire de B, correspond à « ne pas obtenir un multiple de 4 ».
Ainsi, les issues de l'événement $\bar{B}$ sont : **{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10}**.

Il y en a 8, donc $p(\bar{B}) = \frac{8}{10} = \mathbf{0,8}$

Exemple 2

	Pâtisserie	**Laitage**	**Fruit**	**Total**
Viande	226	145	65	**432**
Poisson	44	47	73	168
Total	**270**	192	138	600

1. • Le nombre de commandes avec viande est :

$$0{,}72 \times 600 = \mathbf{432}$$

• Le nombre de commandes avec pâtisserie est : $0{,}45 \times 600 = \mathbf{270}$

2.

• On compte 168 commandes avec poisson sur les 600 commandes, donc

$p(A) = \frac{168}{600} = 0{,}28 = \mathbf{28}\%$

• On compte 270 commandes avec pâtisserie sur les 600 commandes, donc

$p(B) = \frac{270}{600} = 0{,}45 = \mathbf{45}\%$

• Avec la formule, $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72 = \mathbf{72}\%$

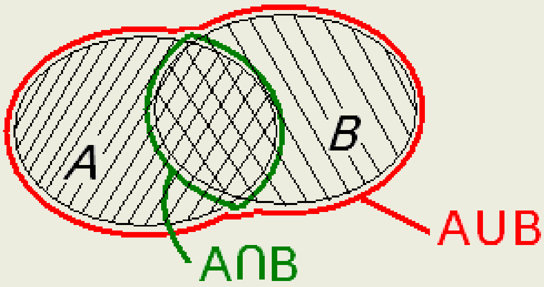
3. $\bar{B}$ est l'événement : « la commande ne comporte **pas de pâtisserie** ».

On peut encore utiliser la formule (ou compter le nombre de commandes sans pâtisserie, mais c'est plus long).

$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55 = \mathbf{55}\%$

1c. Union et intersection

• L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est l'événement qui se réalise si A et B sont réalisés en même temps.



• L'union de A et de B, notée $A \cup B$, est l'événement qui se réalise si soit A, soit B, soit les deux sont réalisés.

Propriété : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$
ou, de façon équivalente, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemple 1 On lance un D20 (dé à vingt faces). On considère les événements suivants :

A : « *obtenir un multiple de 3* » B : « *obtenir un multiple de 4* » C : « *obtenir 15 ou plus* »
Donner les issues qui composent les événements : A ; B ; C ; $\bar{C}$; $A \cap B$; $C \cap \bar{A}$ et $B \cup C$.

Exemple 2 Voici la répartition des élèves dans une classe. On interroge un élève au hasard.
On appelle F : « *interroger une fille* »
et D : « *interroger un demi-pensionnaire* ».
Donner $p(F)$; $p(\bar{F})$; $p(F \cap D)$; $p(\bar{F} \cap D)$ et $p(F \cup D)$ sous forme de fraction irréductible.

	Externes	**Demi-pensionnaires**
Filles	7	11
Garçons	9	6

Exemple 3 Dans une usine, on produit en série 10 000 pièces par jour. Ces pièces passent un contrôle qualité pour éliminer une partie des pièces défectueuses. Le gérant décide de réaliser une étude complète et minutieuse de la production du jour. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Pièces conformes	**Pièces défectueuses**	**Total**
Pièces acceptées au contrôle qualité	8 280	60	8 340
Pièces rejetées au contrôle qualité	720	940	1 660
Total	9 000	1 000	10 000

On tire une pièce de la production au hasard et on note :
• A : « La pièce tirée est acceptée par le contrôle qualité. » • C l'événement : « La pièce tirée est conforme. »
1. Calculer la probabilité de A puis de $\bar{A}$.
2. Pour chaque événement, le définir par une phrase puis calculer sa probabilité en pourcentage.
a. $A \cap C$ **b.** $A \cup C$ **c.** $C \cap \bar{A}$

Exemple 1

• $\boldsymbol{A} = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$; $\boldsymbol{B} = \{4; 8; 12; 16; 20\}$ et $\boldsymbol{C} = \{15; 16; 17; 18; 19; 20\}$
• $\bar{C}$ contient tous les nombres qui ne sont pas dans C. Donc $\boldsymbol{\bar{C}} = \{1; 2; \dots; 13; 14\}$
• $A \cap B$ contient les nombres qui sont à la fois dans A et dans B. $\boldsymbol{A \cap B} = \{12\}$
• $C \cap \bar{A}$ contient les nombres qui sont dans C mais pas dans A.

$$\boldsymbol{C \cap \bar{A}} = \{16; 17; 19; 20\}$$

• $B \cup C$ contient les nombres qui sont dans B ou dans C (ou dans les deux à la fois) : $\boldsymbol{B \cup C} = \{4; 8; 12; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.

Exemple 2

On remarque d'abord que l'effectif total est : $7 + 11 + 9 + 6 = \mathbf{33}$

• On compte 18 filles, donc $p(F) = \frac{18}{33} = \mathbf{\frac{6}{11}}$

• On compte 15 garçons, donc $p(\bar{F}) = \frac{15}{33} = \mathbf{\frac{5}{11}}$

• On compte 11 filles demi-pensionnaires, donc $p(F \cap D) = \frac{11}{33} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

• On compte 6 garçons demi-pensionnaires, donc $p(\bar{F} \cap D) = \frac{6}{33} = \mathbf{\frac{2}{11}}$

• $F \cup D$ correspond aux élèves qui sont soit des filles, soit demi-pensionnaires, soit les deux. Il y en a donc $7 + 11 + 6 = 24$. $p(F \cup D) = \frac{24}{33} = \mathbf{\frac{8}{11}}$

Exemple 3

1. On compte 8 340 pièces acceptées sur les 10 000, donc $p(A) = \frac{8\,340}{10\,000} = \mathbf{0,834}$

Ainsi, $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}834 = \mathbf{0,166}$

2a. $A \cap C$ correspond à « **la pièce est acceptée ET conforme** ».

Dans le tableau, cela correspond à 8 280 pièces. $p(A \cap C) = \frac{8\,280}{10\,000} = \mathbf{0,828}$

2b. $A \cup C$ correspond à « **la pièce est acceptée OU conforme** ».

On applique la formule. $p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$.

Il nous faut d'abord calculer $p(C) = \frac{9\,000}{10\,000} = 0{,}9$

Ainsi, $p(A \cup C) = 0{,}834 + 0{,}9 - 0{,}828 = \mathbf{0,906}$

2c. $C \cap \bar{A}$ correspond à « **la pièce est conforme ET n'est PAS acceptée** ».

Dans le tableau, cela correspond à 720 pièces. $p(C \cap \bar{A}) = \frac{720}{10\,000} = \mathbf{0,072}$

2. Probabilités conditionnelles

2a. Rappel : fréquences conditionnelles

On doit parfois rechercher une proportion parmi une partie qui vérifie une condition. Cela s'appelle une fréquence conditionnelle.

Exemple 1 Le tableau suivant détaille les boîtes vendues par un chocolatier lors d'un salon du chocolat.

a. Compléter le tableau.

Les réponses sont à arrondir à l'unité.

b. Quelle est le pourcentage de boîtes vendues le samedi par rapport au total ?

	Samedi	Dimanche	**Total**
Chocolat noir	45	68	
Chocolat praliné	80		
Total		165	

c. Quelle est la proportion de boîtes de chocolat noir parmi les boîtes vendues le samedi ?

d. Quelle est la proportion de boîtes de chocolat pralinés vendues le samedi parmi le total de boîtes vendues ?

Exemple 2

La tableau ci-contre donne la répartition des étudiants en France selon le secteur et la formation au cours de l'année 2016-2017.

a. Compléter le tableau.

b. Quelle est la fréquence des étudiants en CPGE dans le privé ? Donner le pourcentage arrondi à 0,1%.

c. Quelle est la proportion des étudiants du public parmi les BTS ? Donner la réponse arrondie à 0,01%.

d. Quelle est la proportion des étudiants de BTS dans le public ? Donner la réponse arrondie à 0,1%.

Effectifs *(en milliers)*	Public	Privé	**Total**
Universités	1 624		1 624
BTS et assimilés	173		257
CPGE		12	86
Autres	264	379	643
Total	2 135		**2 610**

Exemple 1

a.

	Samedi	Dimanche	Total
Chocolat noir	45	68	**113**
Chocolat praliné	80	**97**	**177**
Total	**125**	165	**290**

b. Au total, 125 boîtes ont été vendues le samedi, ce qui représente $\frac{125}{290} \approx 0{,}43 \approx \mathbf{43}\%$.

c. *Attention, ici on demande une **fréquence conditionnelle**, uniquement **parmi les boîtes vendues le samedi**. L'effectif total est donc le nombre de boîtes vendues le samedi, c'est-à-dire 125.*

Sur les 125 boîtes vendues le samedi, 45 contiennent du chocolat noir, ce qui représente $\frac{45}{125} = 0{,}36 = \mathbf{36}\%$ des boîtes vendues le samedi.

d. Sur les 290 boîtes vendues au total, 80 sont des boîtes de chocolats pralinés vendues le samedi, ce qui représente $\frac{80}{290} \approx 0{,}28 \approx \mathbf{28}\%$ du total.

Exemple 2

a.

Effectifs (en milliers)	Public	Privé	Total
Universités	1 624	**0**	1 624
BTS et assimilés	173	**84**	257
CPGE	**74**	12	86
Autres	264	379	643
Total	2 135	**475**	2 610

b. *On demande une **fréquence conditionnelle**, uniquement parmi les étudiants du privé.*
*Un arrondi à **0,1%** signifie que l'on souhaite un chiffre après la virgule dans le pourcentage. Il nous faut donc **trois** chiffres après la virgule dans le nombre décimal.* Sur les 475 milliers d'étudiants du privé, 12 sont en CPGE,
ce qui représente $\frac{12}{475} \approx 0{,}025 \approx \mathbf{2,5}\%$ des étudiants du privé.

c. *Un arrondi à **0,01%** signifie que l'on souhaite un chiffre après la virgule dans le pourcentage. Il nous faut donc **quatre** chiffres après la virgule dans le nombre décimal.* Sur les 257 milliers d'étudiants en BTS, 173 sont dans le public,
ce qui représente $\frac{173}{257} \approx 0{,}6732 \approx \mathbf{67,32}\%$ des étudiants de BTS.

d. Sur les 2 135 milliers d'étudiants du public, 173 sont en BTS,
ce qui représente $\frac{173}{2\,135} \approx 0{,}081 \approx \mathbf{8,1}\%$ des étudiants du public.

2b. Définition

Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $p_B(A)$, la probabilité que A se réalise si on suppose que B est réalisé. On a :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$$

Par produit en croix, on trouve $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.

Exemple 1 Une boulangerie propose 500 pains dont la répartition est donnée dans le tableau ci-contre. On choisit un pain au hasard dans cette boulangerie. On note

- A l'événement « le pain choisi est un pain maison »
- B l'événement « le pain choisi est un pain complet »

	Nature	Complet	Total
Pains maison	140	70	210
Pains de campagne	210	80	290
Total	350	150	500

a. Calculer $p_A(B)$ puis $p_B(A)$, en pourcentage arrondi à l'unité.
b. Exprimer la probabilité de choisir un pain maison parmi les pains nature. Puis, calculer cette probabilité.

Exemple 2 On réalise un test de dépistage d'un virus sur 1 000 personnes, dont 96% sont saines et 4% sont porteuses du virus. Parmi les personnes saines, le test est négatif dans 97,5% des cas. On parle dans ce cas de spécificité du test. Parmi les porteurs du virus, le test est positif dans 95% des cas. On parle alors de sensibilité du test.

	Test positif	Test négatif	Total
Patient sain			
Patient malade			
Total			1000

1. Compléter le tableau.
2. On choisit un patient au hasard.
On appelle V l'événement « la personne est porteuse du virus » et T l'événement « le test est positif ».
Dans chaque cas, exprimer la probabilité demandée avec les événements V et T, puis la calculer.
a. La probabilité que la personne choisie soit porteuse du virus et positive.
b. La probabilité que la personne soit porteuse du virus sachant que le test est positif.
c. La probabilité que la personne soit positive sachant qu'elle est porteuse du virus.
d. La probabilité que la personne soit saine sachant que le test est négatif.

Exemple 1 **a.** • *Pour calculer* $p_A(B)$ *« la probabilité de B **sachant A** », on ne doit regarder **que dans la ligne correspondant à A**, c'est-à-dire aux pains maison. Notez que cela correspond aux **fréquences conditionnelles**, vues en partie 1.*

$p_A(B) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3} \approx \mathbf{33\%}$

• *En revanche, pour* $p_B(A)$ *« la probabilité de A **sachant B** », on ne doit regarder **que dans la colonne correspondant à B**, c'est-à-dire les pains complets.*

$p_B(A) = \frac{70}{150} = \frac{7}{15} \approx \mathbf{47\%}$

b. L'événement « pain nature » correspond aux pains non-complets, c'est-à-dire à $\bar{B}$. Ainsi, la probabilité demandée est $\boldsymbol{p_{\bar{B}}(A)} = \frac{140}{350} = \frac{2}{5} = \mathbf{40\%}$

	Positif	Négatif	Total

Exemple 2

Sain	24	**936**	**960**
Malade	**38**	2	40
Total	62	938	1 000

1. • On calcule d'abord le nombre de personnes saines : 0,96 × 1 000 = **960**.
Le 4% donné dans l'énoncé est redondant.
• 97,5% des personnes saines ont un test négatif : 0,975 × 960 = **936**
• 95% des personnes malades ont un test positif : 0,95 × 40 = **38**
On complète tout le reste par additions/soustractions.

2. *Notez que l'événement V correspond à la ligne « malade ».*

a. On demande la probabilité que la personne choisie (sans conditions) corresponde à la fois à V et à T, et on la choisit parmi tout le monde.

Il s'agit de $\boldsymbol{p(V \cap T)} = \frac{38}{1\,000} = \mathbf{3,8\%}$

b. On cherche la probabilité que la personne choisie corresponde à V, et on la choisit uniquement parmi celles ayant un test positif T.

Il s'agit de $\boldsymbol{p_T(V)} = \frac{38}{62} \approx \mathbf{61\%}$

c. On cherche la probabilité que la personne choisie corresponde à T, et on la choisit uniquement parmi les porteurs du virus V.

Il s'agit de $\boldsymbol{p_V(T)} = \frac{38}{40} = \mathbf{95\%}$. *Cette probabilité était donnée dans l'énoncé…*

d. On cherche la probabilité que la personne choisie corresponde à $\bar{V}$, et on la choisit uniquement parmi les personnes négatives $\bar{T}$.

Il s'agit de $\boldsymbol{p_{\bar{T}}(\bar{V})} = \frac{936}{938} \approx \mathbf{99,8\%}$.

2c. Applications

Exemple 1 Dans une ville de 15 000 foyers, 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif. Parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30% consomment des produits bio. Parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio.
On choisit au hasard un foyer dans cette ville.
On note T l'événement : « Le foyer pratique le tri sélectif »
et B l'événement : « Le foyer consomme des produits bio ».

	A	B	C	D
1		T	non-T	total
2	B			
3	non-B			
4	total			15 000

1. Compléter la capture d'écran de tableur à partir des valeurs fournies précédemment.
2. Montrer que la probabilité de l'événement B est égale à 0,24.
3. Calculer la probabilité qu'un foyer pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme bio.
4. Calculer $P_T(\bar{B})$ et interpréter ce résultat. Dans le tableur, quelle formule permettrait d'obtenir ce résultat ?

Exemple 2 Dans un club de judo, les adhérents sont classés par catégorie d'âge et suivant le sexe.
1. Compléter le tableau.
Les réponses suivantes seront données sous forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer la fréquence d'adultes parmi les adhérents de ce club.

	Enfants : de 11 à 14 ans	Jeunes : de 15 à 20 ans	Adultes : 21 ans et plus	Total
Femmes	31		8	64
Hommes			4	
Total	63			120

3. On choisit au hasard un adhérent du club de judo. On considère les événements suivants :
• E : « L'adhérent est un enfant » • F : « L'adhérent est une femme » • G : « L'adhérent est un homme »
a. Calculer la probabilité de l'événement E. **b.** Calculer la probabilité de $E \cap F$ et l'interpréter.
c. Calculer la probabilité que l'adhérent soit une femme sachant que c'est un enfant. **d.** Calculer $p_G(\bar{E})$.

Exemple 1

1. • On calcule d'abord $0,3 \times 10\,500 = \mathbf{3150}$ pour avoir le nombre de foyers consommant bio parmi les 10 500 pratiquant le tri sélectif.
• Tout le reste se trouve par addition/soustraction.

	T	non-T	total
B	**3 150**	450	3 600
non-B	7 350	4 050	11 400
total	10 500	4 500	15 000

2. On calcule $p(B) = \frac{3\,600}{15\,000} = \mathbf{0,24}$

3. On nous demande de trouver $p_B(T) = \frac{3\,150}{3\,600} = \mathbf{0,875}$

4. $p_T(\bar{B}) = \frac{7\,350}{10\,500} = \mathbf{0,7}$.
Ce résultat s'interprète de la manière suivante : **70% des foyers qui pratiquent le tri sélectif ne consomment pas bio**.
Dans le tableur, il faudrait saisir **=B3/B4**.

Exemple 2

1. Tout le tableau se remplit à l'aide d'additions et soustractions.

	Enfants	Jeunes	Adultes	Total
Femmes	31	**25**	8	64
Hommes	**32**	**20**	4	**56**
Total	63	**45**	**12**	120

2. On cherche la fréquence d'adultes parmi tout le monde, c'est-à-dire $\frac{12}{120} = \mathbf{\frac{1}{10}}$.

3. a. $p(E) = \frac{63}{120} = \mathbf{\frac{21}{40}}$

b. $p(E \cap F) = \mathbf{\frac{31}{120}}$. Il s'agit de la probabilité que l'adhérent choisi parmi tout le monde, soit à la fois un enfant et une femme (une fille, donc).

c. $p_E(F) = \mathbf{\frac{31}{63}}$.

d. Parmi les 56 hommes (G), on compte $20 + 4 = 24$ adhérents qui ne sont pas des enfants. Donc $p_G(\bar{E}) = \frac{24}{56} = \mathbf{\frac{3}{7}}$.

2d. Indépendance

Soient A et B deux événements de probabilité non-nulle.
A et B sont dit indépendants si $p(A) = p_B(A)$.

• Deux événements sont indépendants si **la réalisation d'un événement ne change pas la probabilité de l'autre événement.**
• La relation d'indépendance est symétrique : si A et B sont indépendants, alors B et A le sont aussi.
• De plus, si A et B sont indépendants, alors leurs complémentaires $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont.

Exemple 1 On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.
Dans chacun des cas, dire si les événements sont indépendants.
a. A : « tirer un roi » et B : « tirer une carte rouge ».
b. A : « tirer un roi » et B : « tirer une carte strictement supérieure à 10 ».

Exemple 2 Dans un magasin de décoration, 20% des clients achètent de la peinture et 80% achètent de la tapisserie. Parmi les clients qui achètent de la peinture, la moitié paie à crédit. Sur la totalité des clients, 70% paient à crédit.
Les événements « le client paie à crédit » et « le client achète de la peinture » sont-il indépendants ?

Exemple 3 Dans un collège, les élèves doivent choisir une option parmi « latin » et « théâtre », et une langue vivante parmi « allemand » et « italien ». La capture d'écran de tableur ci-contre récapitule les différents choix.

	A	B	C	D
1		**Italien**	**Allemand**	**Total**
2	**Latin**	30	120	150
3	**Théâtre**	90	80	170
4	**Total**		200	320

On choisit un élève au hasard. On désigne par L l'événement « l'élève suit l'option latin » et A l'événement « l'élève a choisi l'allemand ».
a. Quelle formule peut-on rentrer dans la cellule B4 pour qu'elle soit automatiquement remplie ?
b. Calculer $p(A)$. Quelle formule pourrait-on utiliser pour ce calcul ?
c. Calculer $p_L(A)$. Les événements A et L sont-ils indépendants ?

Exemple 1

a. Dans un jeu de 52 cartes, on compte 4 rois : $p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
Sur les 26 cartes rouges, 2 sont des rois : $p_B(A) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$
Les événements A et B sont **indépendants.**
b. On a déjà $p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
Sur les 16 cartes strictement supérieures à dix, 4 sont des rois : $p_B(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
Les événements A et B ne sont **pas indépendants.**

Exemple 2

Soit C l'événement « le client paie à crédit » et P « le client achète de la peinture ».
D'après l'énoncé, $p_P(C) = 50\%$ et $p(C) = 70\%$.
Les probabilités étant différentes, les événements ne sont **pas indépendants**.

Exemple 3

a. On doit rentrer « **= B2 + B3** ».

b. Sur les 320 élèves, 200 pratiquent l'allemand. $p(A) = \frac{200}{320} = \frac{20}{32} = \mathbf{\frac{5}{8}}$

Dans le tableau, il aurait fallu écrire « **= C4 / D4** »

c. Sur les 150 latinistes, 120 pratiquent l'allemand. $p_L(A) = \frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \mathbf{\frac{4}{5}}$

Les résultats obtenus pour $p(A)$ et $p_L(A)$ sont différents, donc les événements A et L ne sont **pas indépendants**.

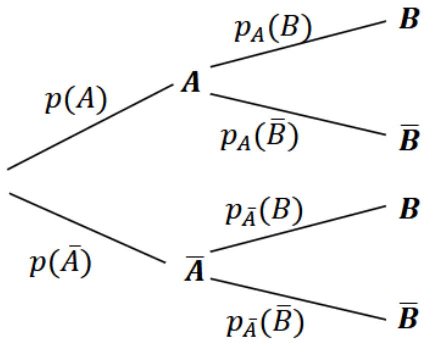
3. Arbres

3a. Arbres de probabilité

Quand une situation comporte plusieurs tirages, on la représente par un arbre. Sur les branches du « deuxième niveau » de l'arbre, on écrit des probabilités conditionnelles.

Arbres de probabilité

- La **somme des probabilités** partant d'un même événement est toujours **1**.
- Si on **multiplie les probabilités du « parcours d'arbre »** A puis B, on trouve la probabilité de l'intersection : $\boldsymbol{p(A \cap B)}$.



$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$

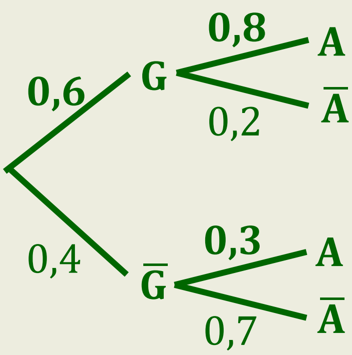
Exemple 1 Dans un lycée, 60 % des élèves ont une calculatrice graphique dont 80% sont de marque A. Les autres ont une calculatrice scientifique, dont 30% sont de marque A.
On emprunte la calculatrice d'un élève au hasard et on considère les événements suivants :
- G : « Sa calculatrice est graphique. »
- A : « Sa calculatrice est de marque A »

a. Réaliser un arbre pondéré, puis calculer $p(G \cap A)$.
b. Quelle est la probabilité que la calculatrice tirée soit une calculatrice scientifique d'une autre marque que A ?

Exemple 2 Lors d'une enquête auprès de saisonniers dans une station balnéaire on a interrogé 700 hommes et 1 300 femmes afin de répertorier leur secteur d'activité.
15 % des hommes travaillent dans le secteur agricole, 60 % dans la restauration, les autres dans l'animation.
5% des femmes travaillent dans le secteur agricole, 55% dans la restauration, les autres dans l'animation.
On choisit au hasard un saisonnier. On note s'il s'agit d'un homme ou d'une femme, puis on note son secteur.
a. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
b. Quelle est la probabilité de choisir une femme travaillant dans la restauration ?
c. Quelle est la probabilité de choisir une personne travaillant dans le secteur agricole ?

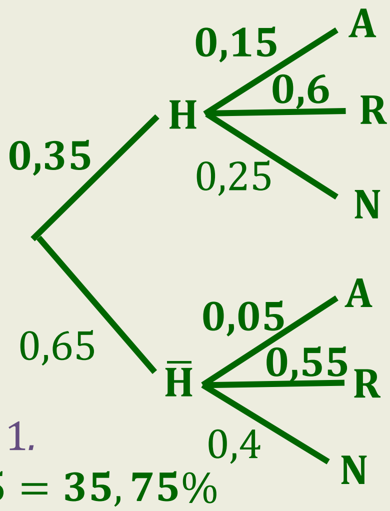
Exemple 1

a. Pour réaliser l'arbre, il faut « traduire » les données de l'énoncé en probabilité.
Les 60% d'élèves qui ont une calculatrice graphique nous disent que $\mathbf{p(G) = 0,6}$.
Parmi celles-ci, 80% sont de marque A, donc $\mathbf{p_G(A) = 0,8}$.
Enfin, 30% des non-graphiques sont A : $\mathbf{p_{\bar{G}}(A) = 0,3}$



*Pour compléter l'arbre, on n'oublie pas que la **somme des probabilités** partant d'un même événement doit être* **1**.
Par exemple $p(\bar{G}) = 1 - 0,6 = 0,4$.
Enfin, $p(G \cap A)$ *s'obtient en **multipliant les probabilités sur les branches** :*
$p(G \cap A) = p(G) \times p_G(A) = 0,6 \times 0,8 = 0,48 = \mathbf{48\%}$
b. $p(\bar{G} \cap \bar{A}) = p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(\bar{A}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28 = \mathbf{28\%}$

Exemple 2



a. On appelle H l'événement « choisir un homme »,
A « choisir un saisonnier du secteur agricole »,
R « choisir un saisonnier en restauration »,
et N « choisir un saisonnier en animation ».
L'énoncé fournit $\mathrm{p(H)} = \mathbf{0,35}$, $\mathrm{p_H(A)} = \mathbf{0,15}$,
et $\mathrm{p_H(R)} = \mathbf{0,6}$, *puis* $\mathrm{p_H(A)} = \mathbf{0,15}$ *et* $\mathrm{p_H(R)} = \mathbf{0,6}$.
On trouve tout le reste en se servant de la somme des probabilités partant d'un même événement égale à 1.

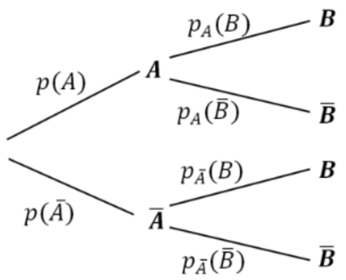
b. $p(\bar{H} \cap R) = p(\bar{H}) \times p_{\bar{H}}(R) = 0{,}65 \times 0{,}55 = 0{,}357\,5 = \mathbf{35,75\%}$

c. $p(A)$ n'est pas directement donnée, mais choisir une personne travaillant dans le secteur agricole revient à choisir soit un homme, soit une femme y travaillant.
On peut additionner ces deux probabilités.
Calculons $p(H \cap A) = p(H) \times p_H(A) = 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}052\,5$
et $p(\bar{H} \cap A) = p(\bar{H}) \times p_{\bar{H}}(A) = 0{,}65 \times 0{,}05 = 0{,}032\,5$
Enfin, $p(A) = p(H \cap A) + p(\bar{H} \cap A) = 0{,}052\,5 + 0{,}032\,5 = 0{,}085 = \mathbf{8,5\%}$

3b. Formule des probabilités totales

Soient A et B deux événements, avec $p(A)$ différente de 0 ou 1.
Alors : $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

Dans un arbre de probabilité avec deux événements A puis B, la **formule des probabilités totales** permet d'obtenir la probabilité de B, en **additionnant toutes les probabilités des chemins arrivant à B**.



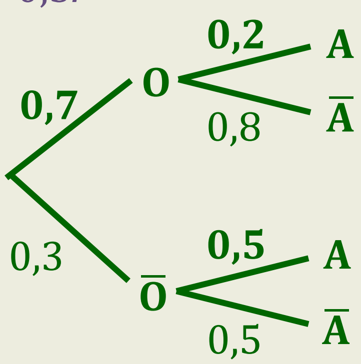
$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$

$\boldsymbol{p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)}$

$\boldsymbol{p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)}$

Exemple Lorsqu'une pie voit un objet brillant, elle vole dans sa direction pour tenter de l'attraper.
Une personne se trouve à proximité de l'objet avec une probabilité de 0,7. Dans ce cas, la pie réussit à attraper l'objet dans 20%.
Sinon, elle y parvient dans 50% des cas car l'objet n'est pas toujours facilement accessible
Quelle est la probabilité que la pie attrape l'objet brillant ? On réalisera un arbre avec les événements O : « la personne est près de l'objet » et A : « la pie attrape l'objet ».

On réalise un arbre avec les données de l'énoncé : on sait que $p(O) = 0{,}7$, $p_O(A) = 0{,}2$ et enfin $p_{\bar{O}}(A) = 0{,}5$.



On calcule aussi les probabilités des événements contraires, directement sur l'arbre.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(O \cap A) + p(\bar{O} \cap A) \\ &= p(O) \times p_O(A) + p(\bar{O}) \times p_{\bar{O}}(A) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}14 + 0{,}15 \\ &= \mathbf{0,29} \end{aligned}$$

La pie a donc **29% de probabilité** d'attaper l'objet.