Chapitre 7 – Nombre dérivé et tangente

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Taux de variation

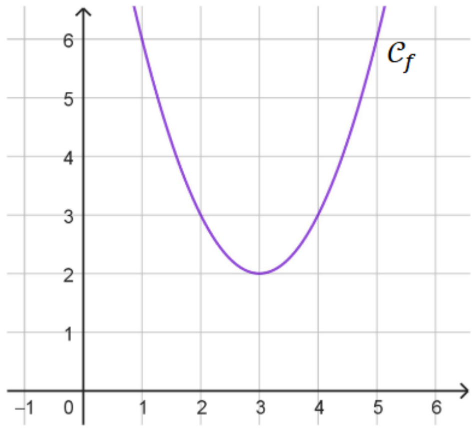
1a. Définition

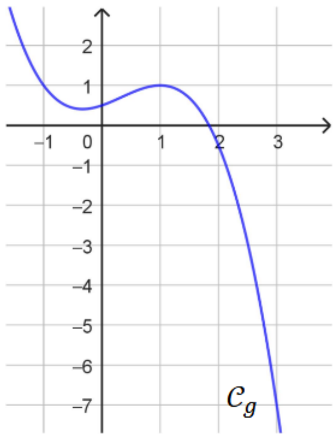
Soit un réel a. Pour tout réel $h \neq 0$,
le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le nombre :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 1 On considère une fonction f telle que $f(2)=5$ et $f(6)=16$.
Calculer son taux de variation de 2 à 6.

Exemple 2
On a représenté deux fonctions f et g ci-contre.
a. Calculer le taux de variation de f de 3 à 5.
b. Calculer le taux de variation de f de 2 à 5.
c. Calculer le taux de variation de g de 1 à 3.





Exemple 3 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-1$.
a. Calculer son taux de variation de 3 à 5.
b. Calculer son taux de variation de -4 à -1.

Exemple 1 On applique la formule : l'écart h entre 2 et 6 vaut 4.

$$\frac{f(6)-f(2)}{4}=\frac{16-5}{4}=\frac{11}{4}=\mathbf{2,75}$$

Exemple 2 a. On lit $f(3)=2$ et $f(5)=6$. L'écart h entre 3 et 5 vaut 2.

$$\frac{f(5)-f(3)}{2}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=\mathbf{2}$$

b. $f(2)=3$ et $f(5)=6$. L'écart h vaut 3 $\frac{f(5)-f(2)}{3}=\frac{6-3}{3}=\frac{3}{3}=\mathbf{1}$

c. $g(1)=1$ et $g(3)=-7$. L'écart h vaut 2. $\frac{g(3)-g(1)}{2}=\frac{-7-1}{2}=\frac{-8}{2}=\mathbf{-4}$

Exemple 3 a. $f(3)=2\times 3^2-1=17$ et $f(5)=2\times 5^2-1=49$.

$$\frac{f(5)-f(3)}{2}=\frac{49-17}{2}=\frac{32}{2}=\mathbf{16}$$

b. $f(-1)=2\times(-1)^2-1=1$ et $f(-4)=2\times(-4)^2-1=31$.

$$\frac{f(-1)-f(-4)}{3}=\frac{1-31}{3}=\frac{-30}{3}=\mathbf{-10}$$

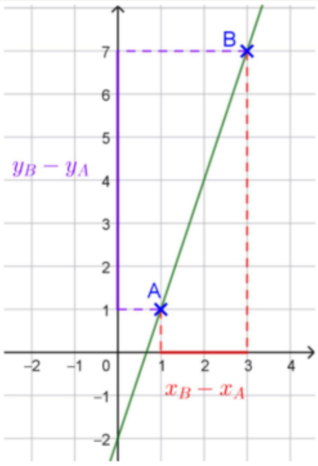
1b. Interprétation graphique

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$.

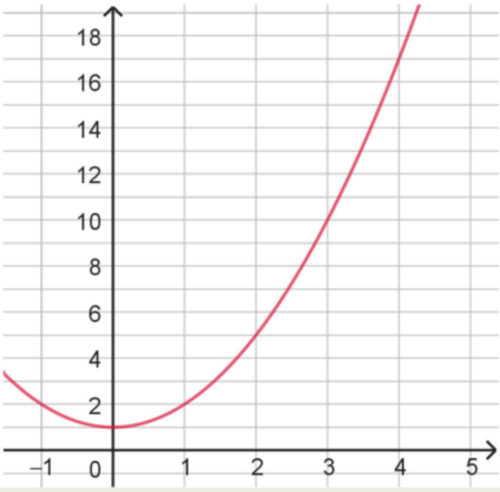
Rappel : si une droite passe par $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, son coefficient directeur est :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

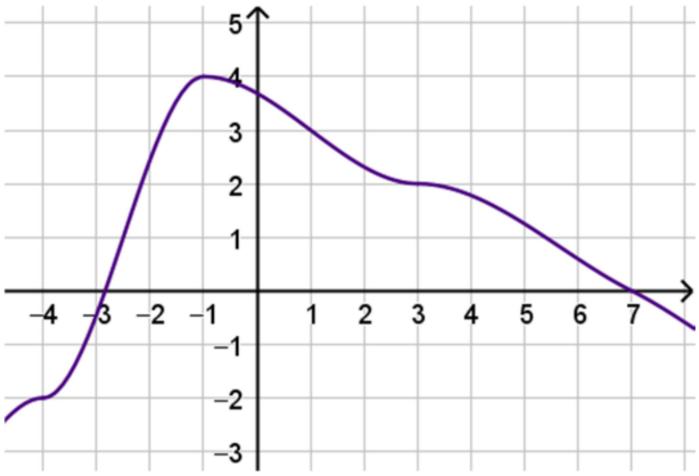
C'est la différence des ordonnées, divisée par la différence des abscisses.
Pour le trouver, on peut souvent partir d'un point de la droite, se décaler de 1 unité vers la droite, et regarder de combien d'unités il faut monter ou descendre pour revenir sur la droite.
Par exemple, dans la figure ci-contre, $\boldsymbol{m = 3}$: quand on se décale de 1 unité à droite, il faut se décaler de 3 unités en haut pour revenir sur la droite.



Exemple 1 On donne la courbe d'une fonction f.
Placer le point A d'abscisse 1, le point B d'abscisse 4, puis lire le taux de variation de f de 1 à 4.



Exemple 2 Voici la courbe d'une fonction g.
En plaçant les points appropriés, lire le taux de variation de g : **a.** de -4 à -1 **b.** de 3 à 7.

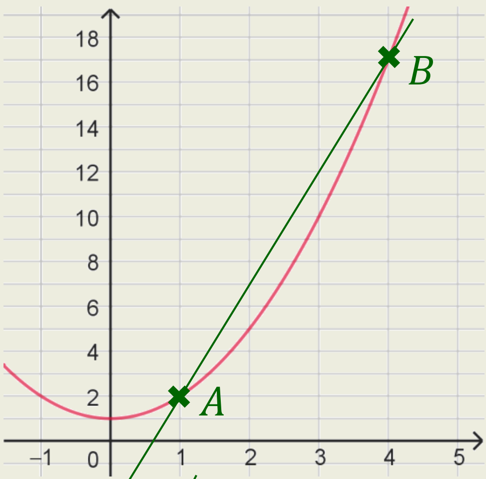


Exemple 1

On place les points comme ci-contre, et on trace la droite (AB).

Le taux de variation de f de 1 à 4 est :

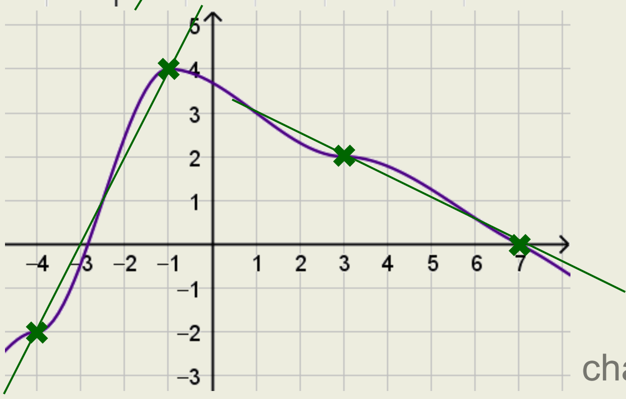
$$\frac{17-2}{4-1} = \frac{15}{3} = \mathbf{5}$$



Exemple 2

Le taux de variation de g de -4 à -1 est : $\dfrac{4-(-2)}{-1-(-4)} = \dfrac{6}{3} = \mathbf{2}$

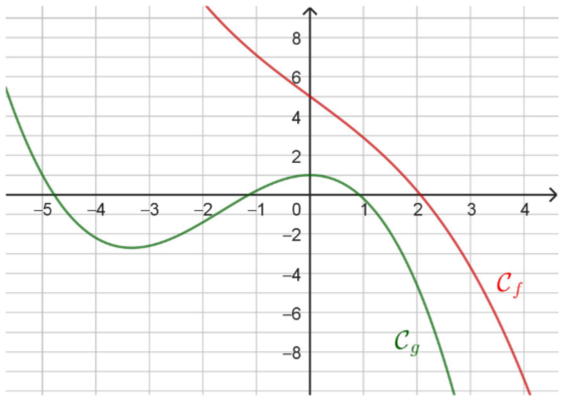
Le taux de variation de g de 3 à 7 est : $\dfrac{0-2}{7-3} = \dfrac{-2}{4} = \mathbf{-0,5}$



1c. Variations

Si f est croissante, tous ses taux de variation sont positifs.
Si f est décroissante, tous ses taux de variation sont négatifs.
Le taux de variation d'une fonction affine est égal à son coefficient directeur.

Exemple 1
On donne ci-contre les courbes de deux fonctions f et g.
a. Donner le signe du taux de variation de la fonction f de -1 à 3.
b. Donner le signe du taux de variation de la fonction g de -3 à 0.
c. Donner le signe du taux de variation de la fonction g de 1 à 2.



Exemple 2 Donner le sens de variation des fonctions suivantes :

$f_1(x) = -6x + 1{,}5$; $f_2(x) = 3{,}6x + 2$; $f_3(x) = -3 + 2x$; $f_4(x) = -\dfrac{2}{3}x - 1$; $f_5(x) = x$; $f_6(x) = 9$

Exemple 1
a. f est décroissante sur $[-1; 3]$, donc le taux de variation est **négatif**.
b. g est croissante sur $[-3; 0]$, donc le taux de variation est **positif**.
c. g est décroissante sur $[1; 2]$, donc le taux de variation est **négatif**.

Exemple 2
- pour f_1 : $m = -6$ est négatif, donc f_1 est **décroissante**.
- pour f_2 : $m = 3{,}6$ est positif, donc f_2 est **croissante**.
- pour f_3 : $m = 2$ est positif donc f_3 est **croissante**.
- pour f_4 : $m = -\dfrac{2}{3}$ est négatif, donc f_4 est **décroissante**.
- pour f_5 : $m = 1$ est positif, donc f_5 est **croissante**.
- pour f_6 : $m = 0$ est nul, donc f_5 est **constante**.

2. Nombre dérivé

2a. Limite du taux de variation

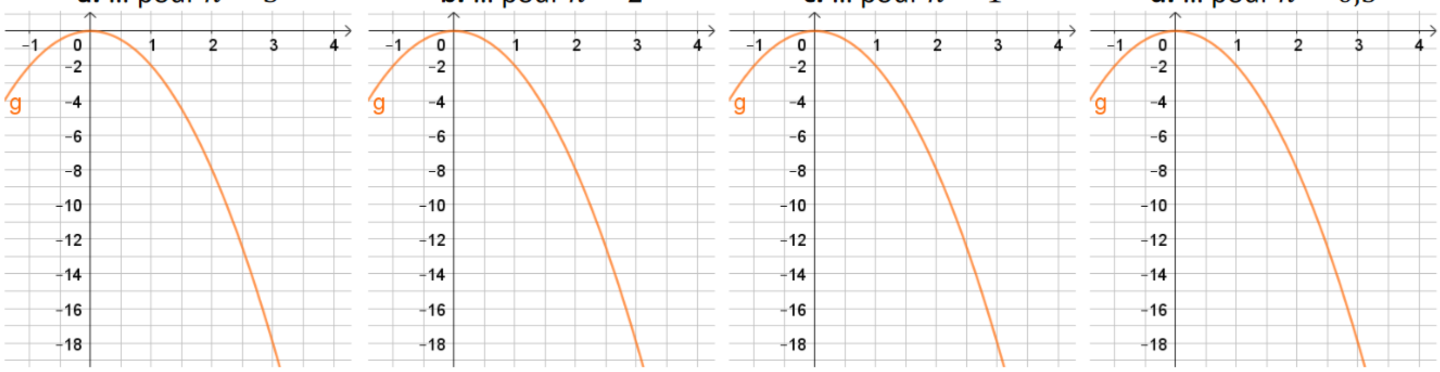
Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f de a à $a + h$ tend vers une valeur limite.

Exemple 1 Soit f définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer son taux d'accroissement de 1 à $1 + h$...

a. ...pour $h = 3$ **b.** ... pour $h = 2$ **c.** ... pour $h = 1$ **d.** ... pour $h = 0{,}5$

Exemple 2 Soit g définie par $g(x) = -2x^2$. Déterminer son taux d'accroissement de 0 à $0 + h$...

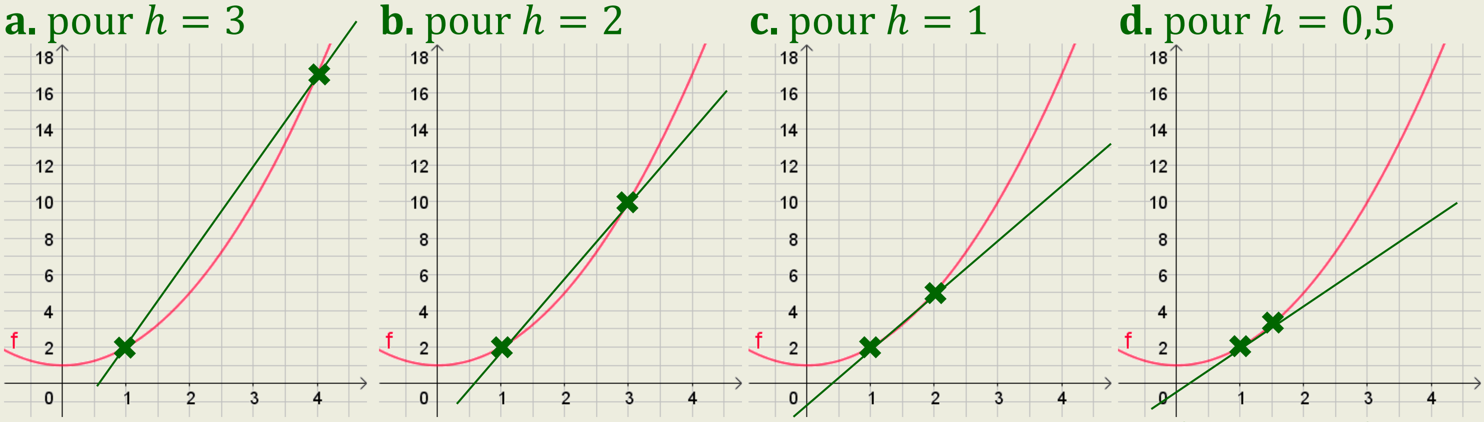
a. ... pour $h = 3$ **b.** ... pour $h = 2$ **c.** ... pour $h = 1$ **d.** ... pour $h = 0{,}5$



Exemple 1

On place deux points d'abscisses 1 et $1 + h$ pour trouver le coefficient directeur.

a. pour $h = 3$ **b.** pour $h = 2$ **c.** pour $h = 1$ **d.** pour $h = 0{,}5$



$$\frac{17-2}{4-1} = \frac{15}{3} = \mathbf{5}$$

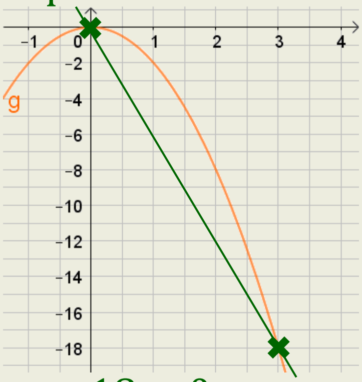
$$\frac{10-2}{3-1} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$

$$\frac{5-2}{2-1} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$$

$$\frac{3{,}25-2}{1{,}5-1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = \mathbf{2,5}$$

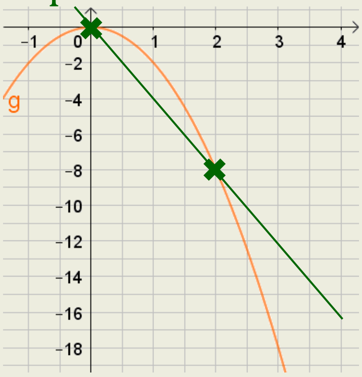
Exemple 2 *On remarque que plus les deux points se rapprochent, plus la droite semble se rapprocher d'une position « limite ».*

a. pour $h = 3$



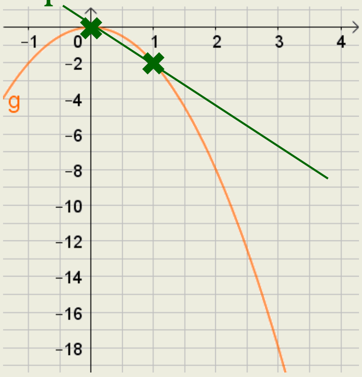
$$\frac{-18-0}{3-0} = \mathbf{-6}$$

b. pour $h = 2$



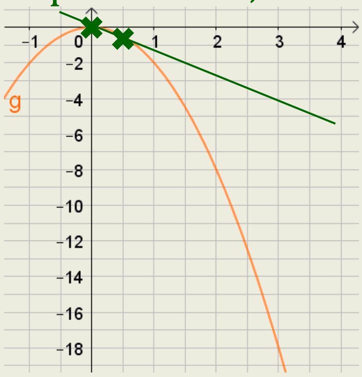
$$\frac{-8-0}{2-0} = \mathbf{-4}$$

c. pour $h = 1$



$$\frac{-2-0}{1-0} = \mathbf{-2}$$

d. pour $h = 0{,}5$



$$\frac{-0{,}5-0}{0{,}5-0} = \mathbf{-1}$$

2b. Définition

La valeur limite du taux de variation lorsque h tend vers 0 s'appelle **nombre dérivé de f en a**. On note ce nombre dérivé $f'(a)$.

Concrètement, **$f'(a)$ mesure la croissance de f en un point précis a.**
C'est plus intéressant que le taux de variation, qui ne la mesure qu'entre deux points.

Exemple
On considère la fonction f définie par

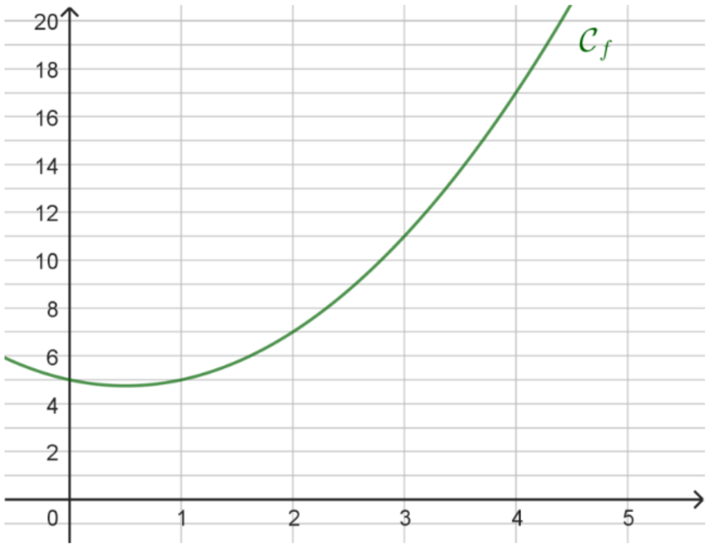
$$f(x) = x^2 - x + 5$$

représentée ci-contre.

1. En plaçant les points correspondants, calculer son taux de variation…

a. de 1 à 4
b. de 1 à 3
c. de 1 à 2

2. De quelle valeur limite ces résultats s'approchent ?
3. Pour $h \neq 0$, calculer $f(1+h)$ et $f(1)$.
En déduire le nombre dérivé $f'(1)$.



Exemple 1

1. **a.** $\dfrac{17-5}{4-1} = \dfrac{12}{3} = \mathbf{4}$

b. $\dfrac{11-5}{3-1} = \dfrac{6}{2} = \mathbf{3}$

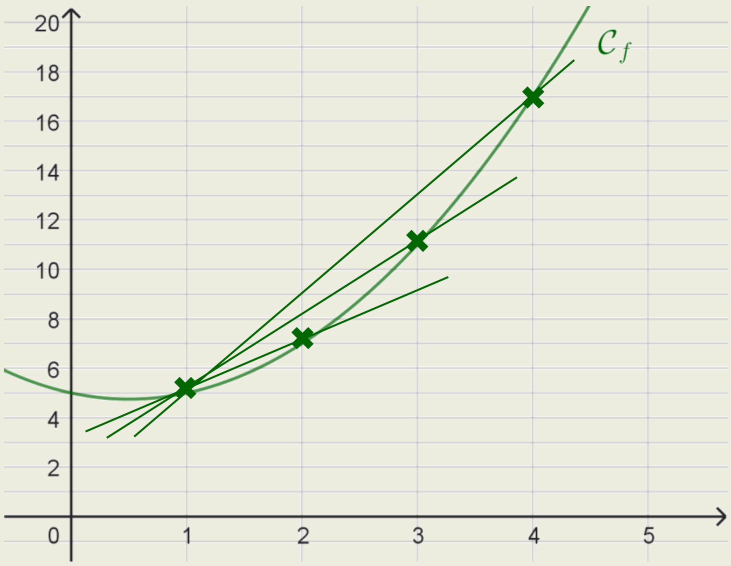
c. $\dfrac{7-5}{2-1} = \dfrac{2}{1} = \mathbf{2}$

2. Ces résultats semblent s'approcher de **1** comme valeur limite.

3. $f(1) = 1^2 - 1 + 5 = \mathbf{5}$

Pour $h > 0$:

$f(1+h) = (1+h)^2 - (1+h) + 5$
$f(1+h) = 1 + 2h + h^2 - 1 - h + 5$
$f(1+h) = \boldsymbol{h^2 + h + 5}$



On peut maintenant calculer le taux de variation de f entre 1 et $(1+h)$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2+h+5-5}{h} = \frac{h^2+h}{h} = \frac{h(h+1)}{h} = \boldsymbol{h+1}$$

Ainsi, si h tend vers 0, le taux de variation vaut $0 + 1 = 1$. Donc $f'(1) = \mathbf{1}$.

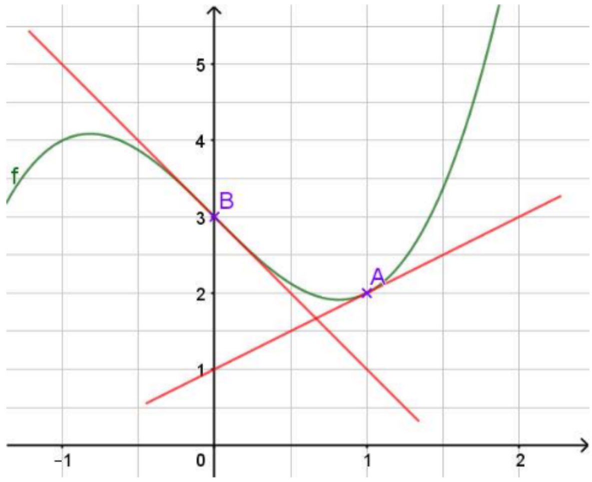
3. Tangente

3a. Définition

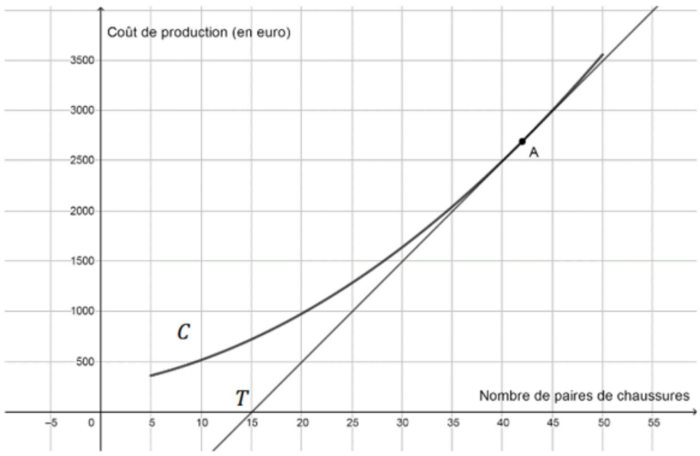
Si h tend vers 0, la droite passant par les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$ se rapproche d'une position limite, appelée tangente à la courbe.
Le coefficient directeur de cette tangente est $f'(a)$.

Exemple 1
On a tracé les tangentes de la courbe représentative d'une fonction f en deux points A et B.

Lire $f(1)$ et $f'(1)$, puis $f(0)$ et $f'(0)$.



Exemple 2
Une entreprise qui fabrique des chaussures modélise son coût de production par une fonction f dont la courbe représentative C est donnée ci-contre.
La droite T est tangente à C au point A d'abscisse 42.
On appelle « coût marginal » pour une production de 42 paires de chaussures, le coût occasionné par la production de la dernière paire de chaussures.
On admet que $f'(42)$ est une bonne approximation de ce coût.
Donner une approximation du coût marginal.



Exemple 1
• $f(1) = \mathbf{2}$ d'après la courbe.
On cherche le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 1 pour trouver que $f'(1) = \mathbf{1}$.
• $f(0) = \mathbf{3}$ d'après la courbe.
On cherche le coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse 0 pour trouver que $f'(0) = -\mathbf{2}$.

Exemple 2 Il s'agit de calculer $f'(42)$. On peut chercher le coefficient directeur de la tangente fournie. Cette tangente passe, par exemple, par les points $(20; 500)$ et $(25; 1\,000)$ donc on calcule :

$$\frac{1\,000-500}{25-20} = \frac{500}{5} = \mathbf{100}$$

Ainsi $f'(42) = \mathbf{100}$.

3b. Équation de la tangente

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a admet pour équation :

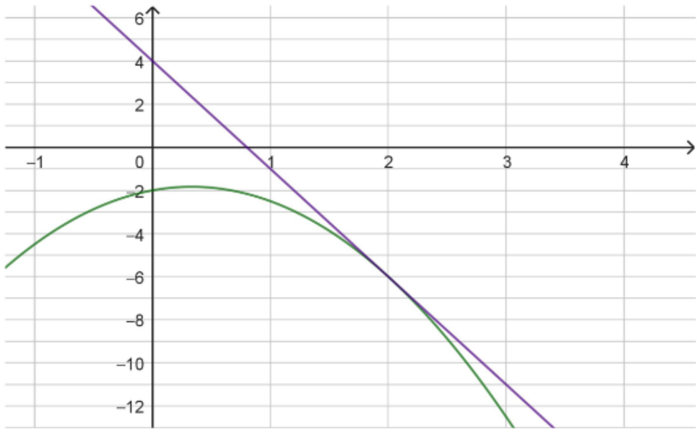
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 1

On a représenté une fonction f ci-contre, et tracé sa tangente au point d'abscisse 2.

a. Lire $f(2)$ et $f'(2)$.

b. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.



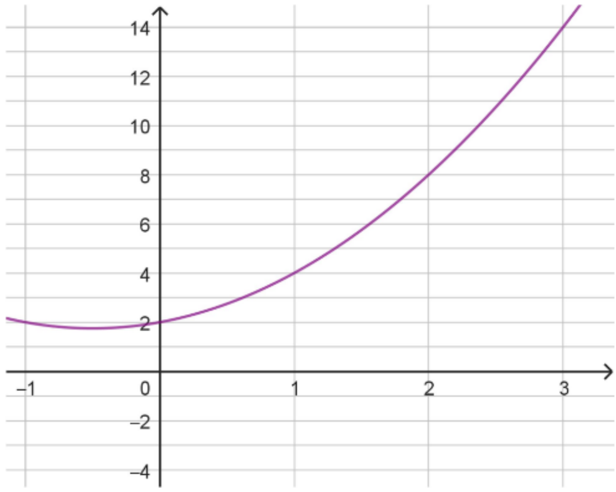
Exemple 2

On a représenté une fonction g ci-contre.

On sait de plus que $f'(1) = 3$.

a. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

b. Tracer cette tangente dans le repère.



Exemple 1 **a.** $f(2) = \mathbf{-6}$ d'après la courbe.

On cherche le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 pour trouver que $f'(2) = \mathbf{-5}$.

b. D'après la formule, l'équation de la tangente est :

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = -5(x - 2) - 6$

$y = -5x + 10 - 6$

$\boldsymbol{y = -5x + 4}$

Exemple 2 a. On lit sur la courbe que $f(1) = 4$ et on sait que $f'(1) = 3$. L'équation est :

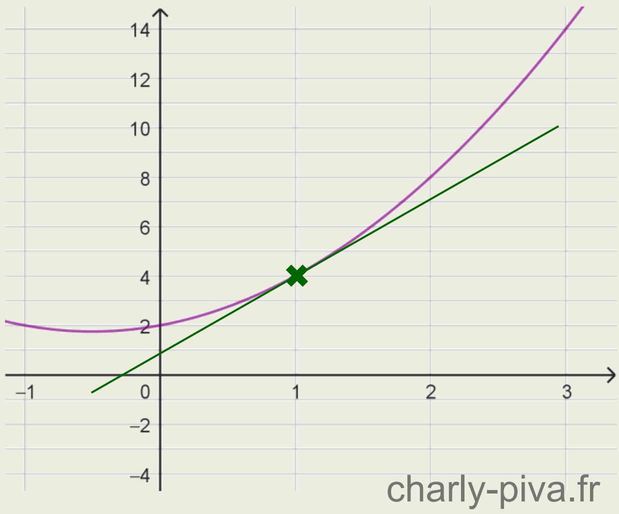
$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = 3(x - 1) + 4$

$y = 3x - 3 + 4$

$\boldsymbol{y = 3x + 1}$

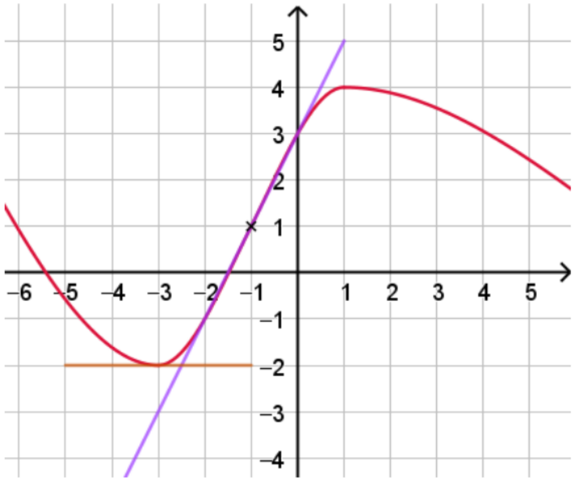
b. On peut tracer une droite passant par le point d'abscisse 1 et de coefficient directeur 3 comme ci-contre :



3c. Tangentes horizontales

Si une tangente au point d'abscisse a est horizontale, cela signifie que $f'(a) = 0$. Cela se produit en particulier si un extremum est atteint en a.

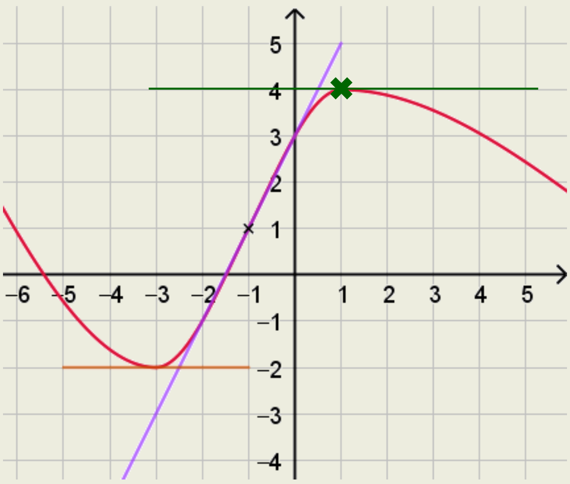
Exemple On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -3 et -1.
a. Lire $f(-1)$ et $f'(-1)$ sur le graphique.
b. Lire $f(-3)$ et $f'(-3)$.
Que peut-on dire de la tangente au point d'abscisse -3 ?
c. Tracer le tableau de variations de la fonction f.
d. Existe-t-il un autre réel a tel que $f'(a) = 0$?
Tracer la tangente correspondante.



a. $f(-1) = \mathbf{1}$ d'après la courbe.
On cherche le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 pour trouver que $f'(-1) = \mathbf{2}$.
b. $f(-3) = \mathbf{-2}$ et $f'(-3) = \mathbf{0}$,
car la tangente au point d'abscisse -3 est **horizontale**.
c.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	

d. f admet un maximum au point d'abscisse 1, donc on sait que $\boldsymbol{f'(1) = 0}$.
On trace la tangente horizontale :



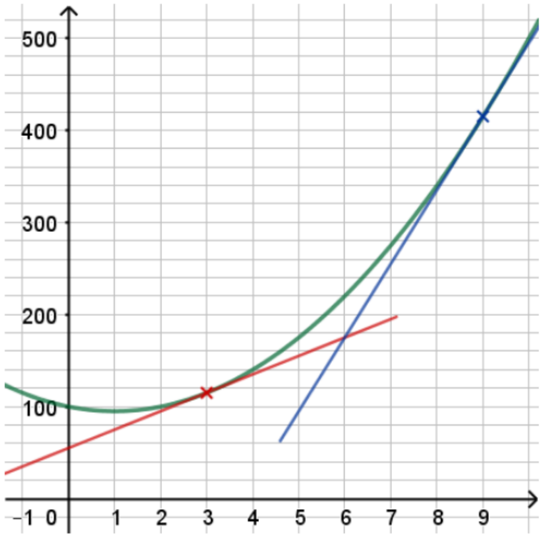
4. Applications

Les nombres dérivés permettent de déterminer une variation instantanée, comme une vitesse ou un coût marginal.

Exercice 1

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

Le coût de production, en dizaines d'euros, de t tonnes de peinture, est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $[1; 20]$ par $C(t) = 5t^2 - 10t + 245$.



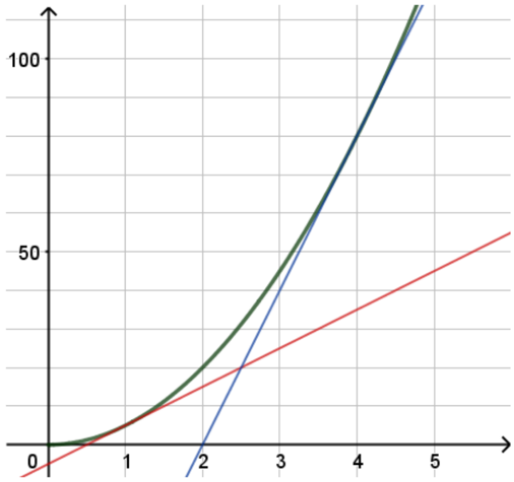
On a tracé les tangentes en 3 et en 9.

Donner $f'(3)$ et $f'(9)$.

Que représentent les nombres donnés ?

Exercice 2

La courbe ci-dessous indique la distance parcourue par une voiture en mètres, en fonction du temps en seconde.



a. Quelle est la distance parcourue après 4 secondes ?

b. On a tracé les tangentes en 1 et en 4.

Donner la vitesse de la voiture au bout de 1 seconde et de 4 secondes.

c. A quoi peut-on voir que la voiture était à l'arrêt au début de la mesure ?

Exemple 1

On lit approximativement le coefficient directeur des tangentes :

$f'(3) \approx \mathbf{20}$ et $f'(9) \approx \mathbf{80}$.

Ces nombres correspondent au **coût marginal** pour 3 et 9 tonnes de peinture.

Exemple 2

a. $f(4) = 80$. Après 4 secondes, la voiture a parcouru **80** mètres.

b. $f'(1) \approx \mathbf{10}$ et $f'(4) \approx \mathbf{40}$.

Après 1 seconde, la vitesse semble être de **10** mètres par seconde.

Après 4 secondes, la vitesse semble être de **40** mètres par seconde.

c. La voiture était à l'arrêt au début de la mesure car la tangente semble être **horizontale** en 0, ce qui traduit que $\boldsymbol{f'(0) = 0}$.