Chapitre 4 – Fonctions et représentations graphiques

1. Notion de fonction

1a. Définition

Une fonction f est un objet mathématique qui à tout nombre x d'un ensemble de définition, associe un autre nombre $f(x)$.
On peut noter $f: x \longmapsto$ …

Exemple 1
Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 7$. (on note aussi $\boldsymbol{f: x \longmapsto 3x^2 - 7}$, c'est la même chose)
a. Calculer $f(5)$ et $f(-1)$. **b.** Résoudre l'équation $f(x) = 101$.

Exemple 2
Soit la fonction g définie par $g: x \longmapsto (x-3)(2x+1)$.
a. Calculer $g(5)$ et $g(0)$. **b.** Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

Exemple 3 Le prix d'une course avec une application de taxi est de 5,70€, plus 2,80€ par kilomètre parcouru.
a. Soit f la fonction qui à x associe le prix d'une course de x kilomètres. Donner l'expression de $f(x)$.
b. Calculer $f(7{,}4)$. **c.** Quelle distance correspond à un prix de 40€ ?

Exemple 4 On considère le programme de calcul ci-contre :
a. Tester ce programme en choisissant 2 comme nombre de départ.
b. On considère g, fonction qui à x, un nombre de départ, associe $g(x)$, le nombre final. Donner l'expression de $g(x)$ et la réduire.
c. Résoudre l'équation $g(x) = 48$.

Choisir un nombre
Lui ajouter 5
Multiplier le résultat par 3
Soustraire 6 au produit
Écrire le résultat

Exemple 5 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{9}{x-7}$
a. Calculer $f(5)$. **b.** Quel est l'ensemble de définition de f ?

Exemple 1
a. $f(5) = 3 \times 5^2 - 7 = 3 \times 25 - 7 = 75 - 7 = \mathbf{68}$
et $f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 7 = 3 \times 1 - 7 = 3 - 7 = \mathbf{-4}$
b. $f(x) = 101$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 7 = 101$
$\Leftrightarrow 3x^2 = 101 + 7$
$\Leftrightarrow 3x^2 = 108$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{108}{3}$
$\Leftrightarrow x^2 = 36$ et les solutions sont **6** et **−6**.

Exemple 2

a. $g(5) = (5-3)(2\times 5+1) = 2\times 11 = \mathbf{22}$
et $g(0) = (0-3)(2\times 0+1) = -3\times 1 = \mathbf{-3}$

b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1) = 0$ est une équation produit nul.
Soit $x-3=0 \Leftrightarrow x = \mathbf{3}$, soit $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x = -\mathbf{\frac{1}{2}}$

Exemple 3

a. D'après l'énoncé, $f(x) = \mathbf{5{,}7 + 2{,}8x}$.

b. $f(7{,}4) = 5{,}7 + 2{,}8\times 7{,}4 = 5{,}7 + 20{,}72 = \mathbf{26{,}42}$ **€**

c. On doit résoudre l'équation $f(x) = 40$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 5{,}7 + 2{,}8x = 40\\
&\Leftrightarrow 2{,}8x = 40 - 5{,}7\\
&\Leftrightarrow 2{,}8x = 34{,}3\\
&\Leftrightarrow x = \frac{34{,}3}{2{,}8}\\
&\Leftrightarrow x = 12{,}25
\end{aligned}$$

Ainsi, un prix de 40€ correspond à une distance de **12,25 kilomètres.**

Exemple 4

a. On calcule $2+5=7$ puis $7\times 3 = 21$ et enfin $21-6 = \mathbf{15}$.

b. Pour tout x, $g(x) = (x+5)\times 3 - 6 = 3x + 15 - 6 = \mathbf{3x+9}$

c. $g(x) = 48$
$\Leftrightarrow 3x + 9 = 48$
$\Leftrightarrow 3x = 48 - 9$
$\Leftrightarrow 3x = 39$
$\Leftrightarrow x = \frac{39}{3} = \mathbf{13}$

Exemple 5

a. $f(5) = \frac{9}{5-7} = \frac{9}{-2} = \mathbf{-4{,}5}$

b. On ne peut pas diviser par zéro, or $x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$.
On peut donc remplacer x par tous les nombres, sauf 7.
L'ensemble de définition est donc $]-\infty; 7[\cup]7; +\infty[$, qui s'écrit plus simplement $\mathbb{R}\backslash\{\mathbf{7}\}$.

1b. Image et antécédent

Le « nombre de départ » x est appelé antécédent.
Le « nombre d'arrivée » $f(x)$ est appelé image.
« Calculer l'image de a », c'est calculer $f(a)$.
« Déterminer l'antécédent de b » revient à résoudre l'équation $f(x) = b$.

Exemple 1 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 6$
a. Calculer l'image de 7 par f. **b.** Calculer $f(-3)$. **c.** Est-ce-que 4 est bien un antécédent de 22 par f ?

Exemple 2 Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x + 7$
a. Calculer l'image de 4 par g. **b.** Déterminer l'antécédent de 17 par g.
c. Calculer $g(7)$ et $g(2{,}75)$. **d.** Résoudre l'équation $g(x) = 33$.

Exemple 3 Compléter le tableau de valeurs de la fonction h définie par $h(x) = 3x^2 - 5x$, en calculant les images des nombres demandés.

x	2	10	1
$h(x)$			

Exemple 4 Voici le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	-6	-5	1	3	4
$f(x)$	4	3	3	19	30

a. Quelle est l'image de 4 ? **b.** Quelle est l'image de 1 ?
c. Quel est l'antécédent de 19 ? **d.** Quels sont les antécédents de 3 ?

Exemple 1
a. $f(7) = 7^2 + 6 = \mathbf{55}$ **b.** $f(-3) = (-3)^2 + 6 = 9 + 6 = \mathbf{15}$
c. *On peut résoudre l'équation* $\mathrm{f(x)} = 22$, *ou plus simplement vérifier si* $\mathrm{f}(4) = 22$.
$f(4) = 4^2 + 6 = 16 + 6 = 22$ donc **4 est bien un antécédent de 22** par f.

Exemple 2 a. Il s'agit de calculer $g(4) = 2 \times 4 + 7 = 8 + 7 = \mathbf{15}$
b. Déterminer l'antécédent de 17 par g, c'est résoudre l'équation :

$$g(x) = 17$$
$$\Leftrightarrow 2x + 7 = 17$$
$$\Leftrightarrow 2x = 17 - 7$$
$$\Leftrightarrow 2x = 10$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$$

L'antécédent de 17 par g est donc 5, ce qui signifie que $g(5) = 17$.
c. $g(7) = 2 \times 7 + 7 = 14 + 7 = \mathbf{21}$ $g(2{,}75) = 2 \times 2{,}75 + 7 = 5{,}5 + 7 = \mathbf{12,5}$
d. $g(x) = 33 \Leftrightarrow 2x + 7 = 33 \Leftrightarrow 2x = 33 - 7 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = \frac{26}{2} = \mathbf{13}$

Exemple 3
$h(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 = 3 \times 4 - 10 = \mathbf{2}$
$h(10) = 3 \times 10^2 - 5 \times 10 = 3 \times 100 - 50 = \mathbf{250}$
$h(-1) = 3 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) = 3 \times 1 + 5 = \mathbf{8}$

Exemple 4 **a.** L'image de 4 est **30**. **b.** L'image de 1 est **3**.
c. L'antécédent de 19 est **3**. **d.** Les antécédents de 3 sont $\mathbf{-5}$ et **1**.

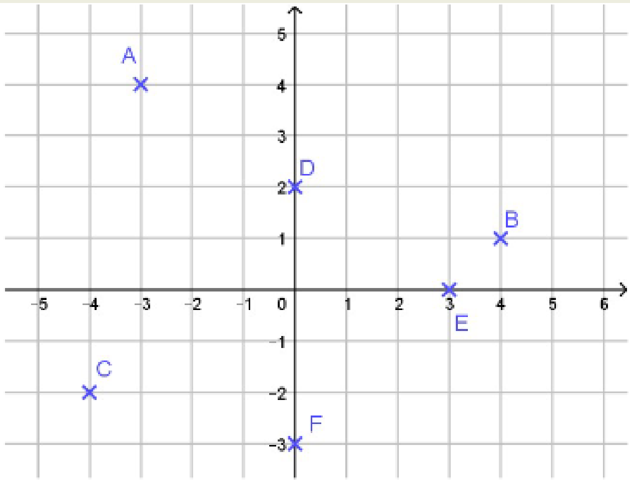
2. Représentation graphique

2a. Repérage

Un point M dans un plan peut être repéré par son abscisse x et son ordonnée y. On note $M(x;y)$.

Exemple 1

Dans le repère, écrire les coordonnées des points placés.

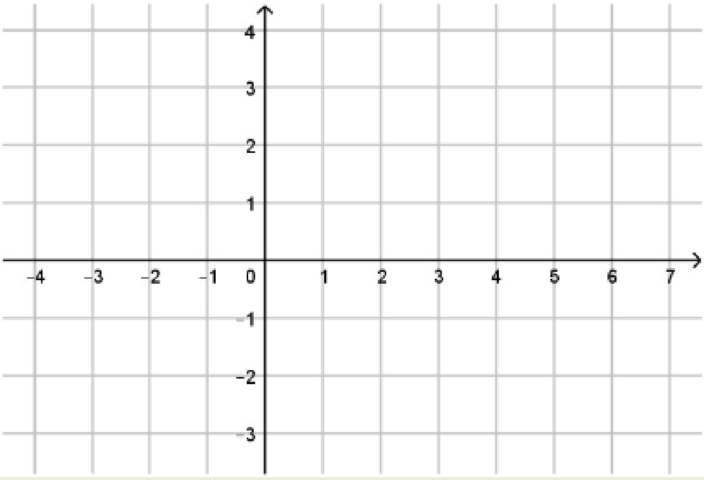


Exemple 2

Dans le repère ci-dessous, placer les points :

$A(3;2)$ $B(1;4)$ $C(6;-3)$ $D(-3;3)$

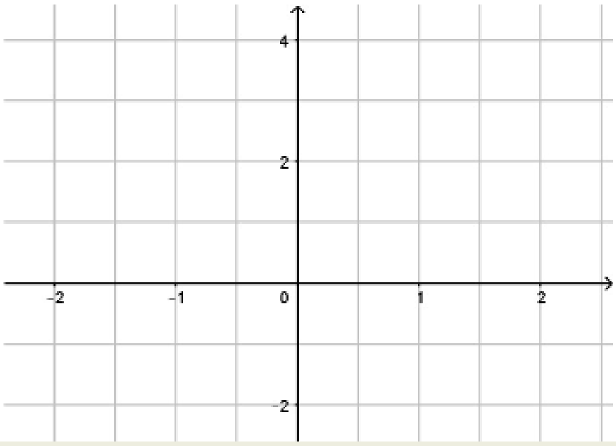
$E(0;2)$ $F(-3;0)$ $G(1;-2)$ $H(0;-1)$



Exemple 3

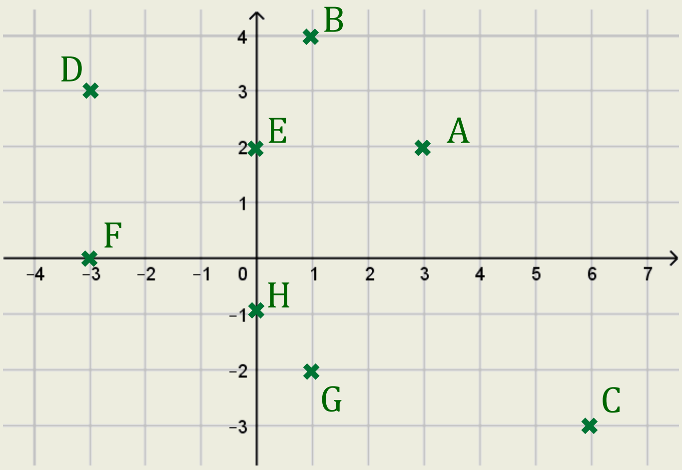
Dans le repère ci-dessous, placer les points :

$A(1;4)$ $B(0{,}5;-2)$ $C(-1{,}5;2)$ $D(2;1)$

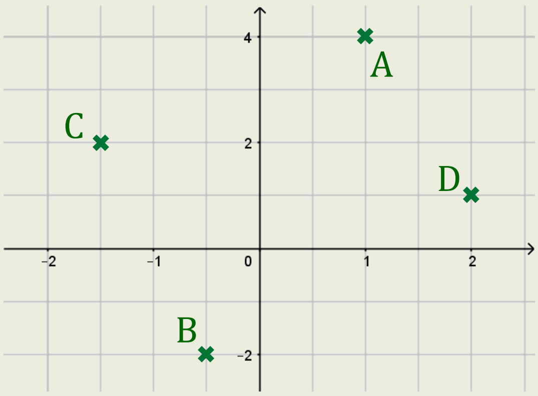


Exemple 1 $A(-3;4)$; $B(4;1)$; $C(-4;-2)$; $D(0;2)$; $E(3;0)$ et $F(0;-3)$.

Exemple 2



Exemple 3



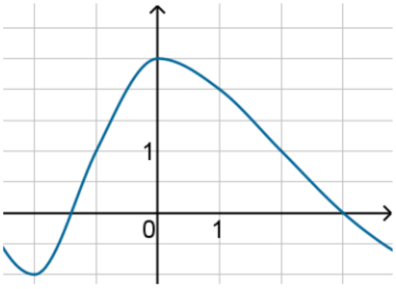
2b. Lire une image ou un antécédent

• Dans un repère du plan, on appelle courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points $(x; y)$ tels que et $y = f(x)$

• Pour lire l'image d'un nombre x, on se positionne au niveau de x sur l'axe des abscisses.

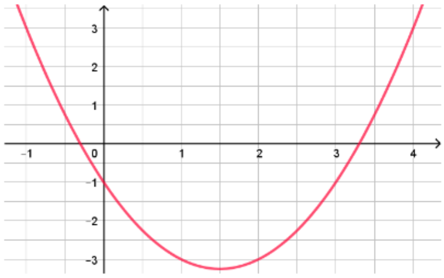
• Pour lire les antécédents d'un nombre y, on se positionne au niveau de y sur l'axe des ordonnées.

Exemple 1 On donne la courbe représentative d'une fonction f. Compléter le tableau de valeurs.



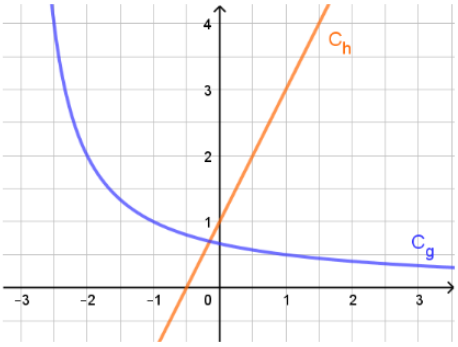
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

Exemple 2 Voici la courbe représentative d'une fonction f.



a. Lire $f(2)$. **b.** Lire l'image de 3 par f.
c. Lire $f(0)$. **d.** Lire les antécédents de 3 par f.

Exemple 3 On a tracé ci-contre les courbes des fonctions $g(x) = \frac{2}{x+3}$ et $h(x) = 2x + 1$ sur $]-3\,;4]$



a. Lire $g(1)$ et $h(1)$.
b. Donner l'antécédent de 2 par g, et par h.
c. Le point $M(3; 7)$ appartient-t-il à $\mathcal{C}_h$? Justifier.

Exemple 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$
a. Le point $A(2; 10)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.
b. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse - 7 ?
c. Y-a-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 26 ?
Si oui, quelles en sont les abscisses ?

Exemple 1 *On se place en face de chaque nombre x sur l'axe des* ***abscisses****.*

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2,5}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Exemple 2 a. $f(2) = -3$ **b.** L'image de 3 par f est $f(3) = -1$ **c.** $f(0) = -1$
d. *Contrairement aux cas précédents, pour lire les antécédents de 3, on se place sur le 3 de l'axe des ordonnées.*
Les antécédents de 3 sont $\mathbf{-1}$ **et 4**. *Autrement dit,* $\mathrm{f}(-1) = 3$ *et* $\mathrm{f}(4) = 3$ *aussi.*

Exemple 3 **a.** $g(1) = \mathbf{0,5}$ et $h(1) = \mathbf{3}$.
b. L'antécédent de 2 par g est $\mathbf{-2}$. L'antécédent de 2 par h est $\mathbf{0,5}$.
c. *La courbe ne permet pas de répondre, mais on connaît l'expression de* h*. La question revient donc à vérifier que* $\mathbf{h(3) = 7}$. $h(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$, donc $\boldsymbol{M \in \mathcal{C}_h}$.

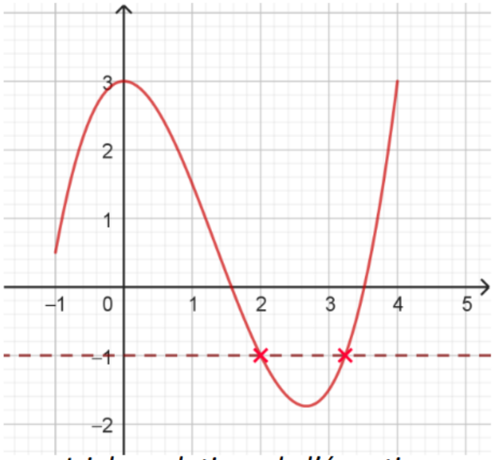
Exemple 4 **a.** $f(2) = 3 \times 2 + 5 = 11 \neq 10$ donc $\boldsymbol{A(2; 10) \notin \mathcal{C}_f}$.
b. On calcule $f(-7) = 3 \times (-7) + 5 = -21$ donc l'ordonnée du point est $\mathbf{-21}$.
c. $f(x) = 26 \Leftrightarrow 3x + 5 = 26 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7$ donc il existe un point de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 26, et son abscisse est **7**.

3. Équations et inéquations

3a. Résoudre une équation

Méthode : Pour résoudre une **équation** graphiquement de la forme $f(x) = a$ (ce qui revient à déterminer les **antécédents** du nombre a) on peut **tracer des pointillés d'ordonnée a**.
Les solutions sont alors les **abscisses** des points d'intersection.

Si on veut résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$ on regarde les **abscisses** des **points d'intersection** des courbes $\mathcal{C}_f$ **et** $\mathcal{C}_g$.



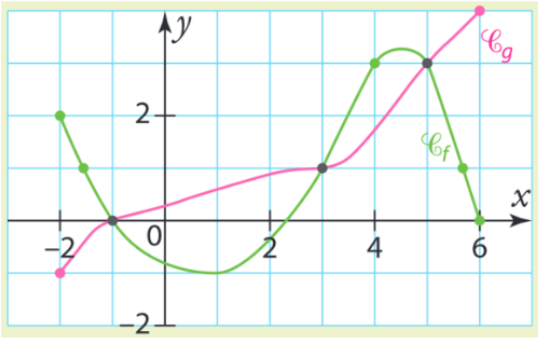
Ici, les solutions de l'équation $f(x) = -1$ sont 2 et environ 3,2.

Exemple On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2; 6]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.

1. À l'aide de la courbe représentative de f, résoudre les équations suivantes.

a. $f(x) = 3$ **b.** $f(x) = 1$ **c.** $f(x) = 4$

2. À l'aide des courbes représentatives de f et g, résoudre $f(x) = g(x)$



Exemple *Pour chaque question, on peut tracer (ou imaginer) des pointillés horizontaux comme dans la méthode.*

1a. $f(x) = 3$ a pour solutions **4 et 5**. *Ce sont les antécédents de 3 par* f.

1b. $f(x) = 1$ a pour solutions **environ $-1,5$; 3 et environ $5,7$**.

1c. $f(x) = 4$ n'a **pas de solution**. *Autrement dit, 4 n'a pas d'antécédent par* f.

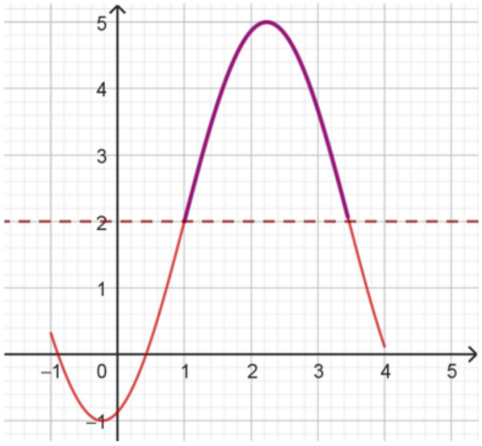
2. *Il s'agit de donner les **abscisses** des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.*

$f(x) = g(x)$ a pour solutions **-1 ; 3 et 5**.

3b. Résoudre une inéquation

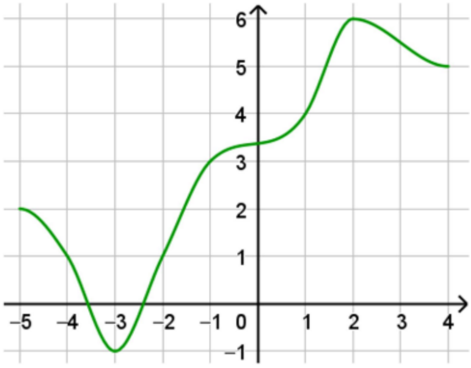
Méthode : Pour résoudre une **inéquation** graphiquement de la forme $f(x) \geq a$, on peut **tracer des pointillés d'ordonnée a**.
Les intervalles solutions correspondent aux **abscisses** où la courbe C_f est **au-dessus de a**.

Si on veut résoudre une équation de la forme $f(x) \geq g(x)$ on regarde les **abscisses** des points tels que **la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g**.

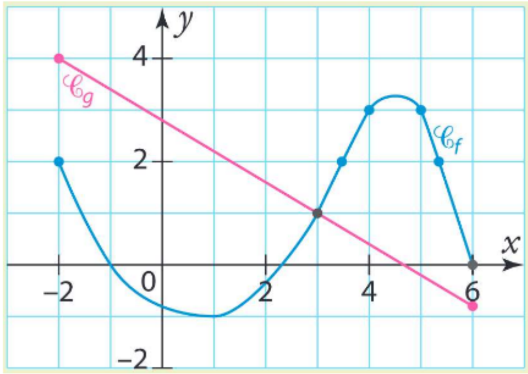


Ici, l'intervalle solution de l'inéquation $f(x) \geq 2$ est $[1; 3{,}5]$

Exemple 1 On considère la fonction f définie sur $[-5; 4]$ représentée ci-contre.
Résoudre les inéquations :
a. $f(x) \geq 3$
b. $f(x) > 3$
c. $f(x) \geq 1$



Exemple 2 On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2; 6]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.
1. À l'aide de la courbe représentative de f, résoudre :
a. $f(x) \geq 3$ **b.** $f(x) < 2$
2. À l'aide des courbes représentatives de f et g, résoudre : **a.** $f(x) \leq g(x)$ **b.** $f(x) < g(x)$



Exemple 1

À nouveau, on imagine des petits pointillés horizontaux d'ordonnée 3.
a. $f(x) \geq 3$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-1; 4]}$.
b. *Ici, c'est une inégalité stricte : on doit exclure les abscisses* x *telles que* $\mathrm{f(x)} = 3$.
$f(x) > 3$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S =]-1; 4]}$.
On n'exclut pas 4 car $\mathrm{f}(4) = 5$, *qui est bien strictement supérieur à 3.*
c. *Ici,* $\mathcal{C}_\mathrm{f}$ *est au-dessus de 1 à deux reprises. La réponse est donc une union de deux intervalles.*
$f(x) \geq 1$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-5; -4] \cup [-2; 4]}$.

Exemple 2

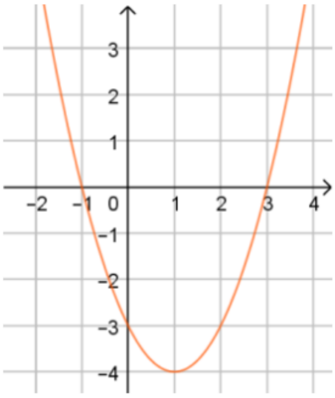
1a. $f(x) \geq 3$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [4; 5]}$.
1b. *Ici, c'est une inégalité stricte : on doit exclure les abscisses* x *telles que* $\mathrm{f(x)} = 2$.
$f(x) < 2$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S =]-2; 3,5[\cup]5,2; 6]}$
2a. $f(x) \leq g(x)$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-2; 3]}$
2b. *Ici, on exclut les abscisses* x *telles que* $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)}$, *c'est-à-dire où* $\mathcal{C}_\mathrm{f}$ *coupe* $\mathcal{C}_\mathrm{g}$.
$f(x) < g(x)$ a pour ensemble solution $\boldsymbol{S = [-2; 3[}$

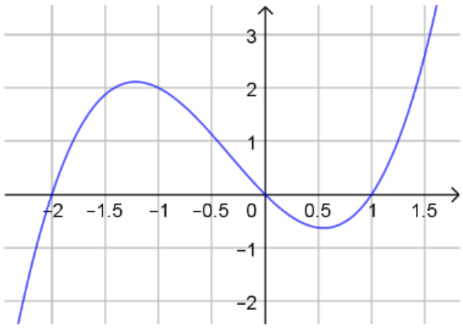
4. Tableaux

4a. Tableau de signe

Ils permettent de dire pour quelles valeurs de x, $f(x)$ est positif (la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses) ou négatif (la courbe est en-dessous).

Exemple 1 Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et représentées ci-contre.





Exemple 2 Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -5x + 12$ et $g(x) = (7x + 28)(x - 3)$

Exemple 1 *On écrit un + quand la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, et un – quand elle est en-dessous.*

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple 2

• $f(x) = -5x + 12$. On résout l'inéquation :

$$-5x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -5x \geq -12 \Leftrightarrow x \leq \frac{-12}{-5} \Leftrightarrow x \leq \mathbf{2,4}$$

On trouve que f(x) *est positif pour* x *inférieur ou égal à 2,4. Dans le tableau, on écrit donc « + » dans la partie à droite de 2,4, et « − » à gauche de 2,4.*

x	$-\infty$		$2,4$		$+\infty$
$-5x + 12$		$+$	0	$-$	

• $g(x) = (7x + 28)(x - 3)$. On résout deux inéquations :

$$7x + 28 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 7x \geq -28$$
$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{28}{7}$$
$$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{-4}$$

$$x - 3 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq \mathbf{3}$$

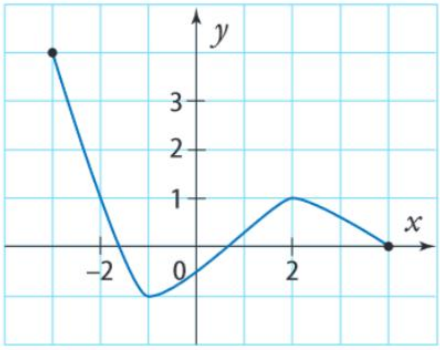
x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$7x + 28$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

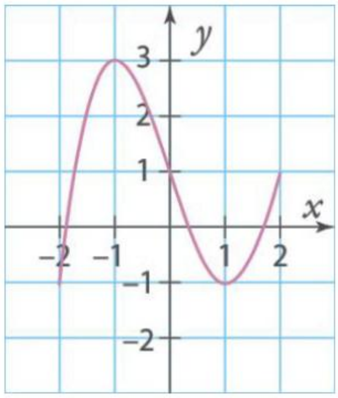
4b. Tableaux de variation

Ils permettent de dire pour quelles valeurs de x, f est croissante ou décroissante.

- la 1ère ligne contient les antécédents (en abscisse)
- la 2ème ligne contient les images (en ordonnée)

Exemple Dresser le tableau de variations des fonctions f et g représentées ci-contre.





On pense bien à indiquer par des flèches les parties croissantes ou décroissantes de la courbe, et ***on aligne le bout des flèches avec les antécédents et les images*** *correspondantes.*

Par exemple, dans le tableau de f, on a $f(2) = 1$ donc on aligne le bout des flèches avec ce 2 et ce 1.

x	-3		-1		2		4
f	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	-2		-1		1		2
g	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

5. Fonctions affines

5a. Définition

Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \mapsto mx + p$
où m et p sont deux nombres, éventuellement nuls.

Exemple Voici huit fonctions. Si elles sont affines, indiquer m (le coefficient directeur) et p (l'ordonnée à l'origine)

$f_1(x) = 4x + 7$

$f_2(x) = -2x + 5$

$f_3(x) = -x + 1{,}7$

$f_4(x) = -8 - 5x$

$f_5(x) = 9x$

$f_6(x) = 12$

$f_7(x) = x^2 + 1$

$f_8(x) = \frac{x}{2} - 9$

• f_1 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = 4}$ et $\boldsymbol{p = 7}$.
• f_2 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = -2}$ et $\boldsymbol{p = 5}$.
• f_3 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = -1}$ et $\boldsymbol{p = 1,7}$.
• *On n'oublie pas que* $\mathbf{m}$ *est toujours le nombre qui multiplie* $\mathbf{x}$. *La fonction* f_4 *pourrait se réécrire* $\mathrm{f(x) = -5x - 8}$.
f_4 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = -5}$ et $\boldsymbol{p = -8}$.

• f_5 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = 9}$ et $\boldsymbol{p = 0}$.
Quand $\mathrm{p = 0}$, *on appelle aussi cela une* ***fonction linéaire***.
• f_6 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = 0}$ et $\boldsymbol{p = 12}$.
Quand $\mathrm{m = 0}$, *on appelle aussi cela une* ***fonction constante***.

• f_7 n'est **pas une fonction affine** à cause du x^2.

• *Diviser par 2 revient à multiplier par* $\frac{1}{2}$, *donc* f_8 *pourrait se réécrire*
$\mathrm{f_8(x) = \frac{1}{2}x - 9}$. f_8 est une fonction affine avec $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$ et $\boldsymbol{p = -9}$.

5b. Représentation graphique

Une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ se représente par une droite.
Si m est positif, la droite « monte », si m est négatif, la droite « descend ».

Exemple

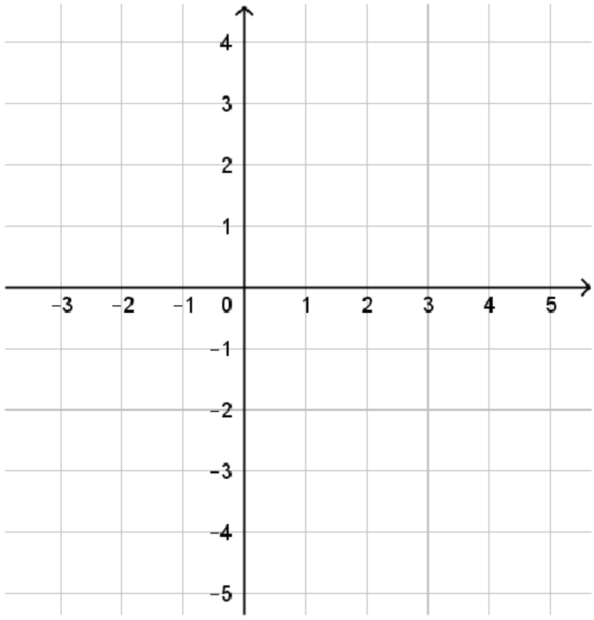
1. Représenter les fonctions affines suivantes :

a. f définie par $f(x) = 2x - 3$

b. $g : x \longmapsto -x + 2$

c. h définie par $h(x) = 0{,}5x - 4$

2. Trouver par le calcul, les coordonnées du point d'intersection des droites représentant f et g.



1. *Pour représenter une fonction affine par une droite, il suffit de placer deux points. Il s'agit donc de calculer l'image de deux nombres par la fonction, et de placer les deux points correspondants. On peut représenter cela dans un tableau.*

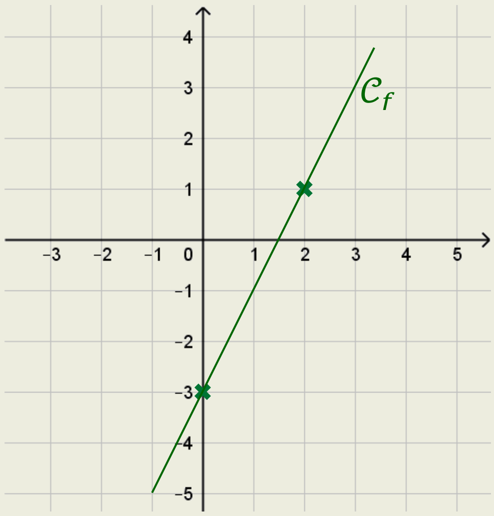
On calcule : $f(\mathbf{2}) = 2 \times 2 - 3 = \mathbf{1}$
et $f(\mathbf{0}) = 2 \times 0 - 3 = \mathbf{-3}$

On a choisi 2 et 0 comme antécédents,
mais on pouvait choisir n'importe quel nombre
présent dans le repère.

On peut donc remplir le tableau de valeurs :

x	2	0
$f(x)$	**1**	**-3**

et placer les deux points correspondants :

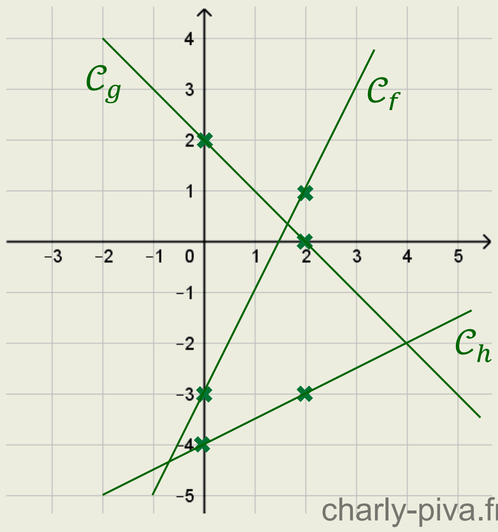


On fait de même pour g et h :

x	2	0
$g(x)$	**0**	**2**

x	2	0
$h(x)$	**-3**	**-4**

et on place aussi les deux points pour chaque droite.



2. Il s'agit de résoudre l'équation :

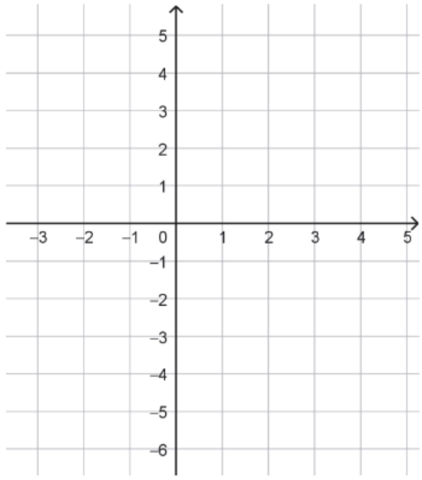
$f(x) = h(x) \Leftrightarrow 2x - 3 = 0{,}5x - 4 \Leftrightarrow 1{,}5x = -1$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{1{,}5} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

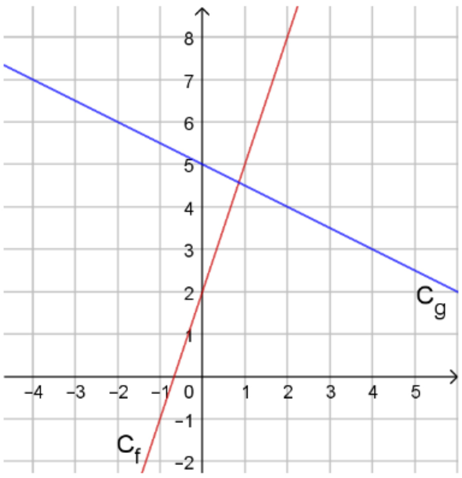
5c. Retrouver l'expression d'une fonction

Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'abscisses différentes. Il existe une seule fonction affine dont la droite passe par A et par B : son coefficient directeur est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

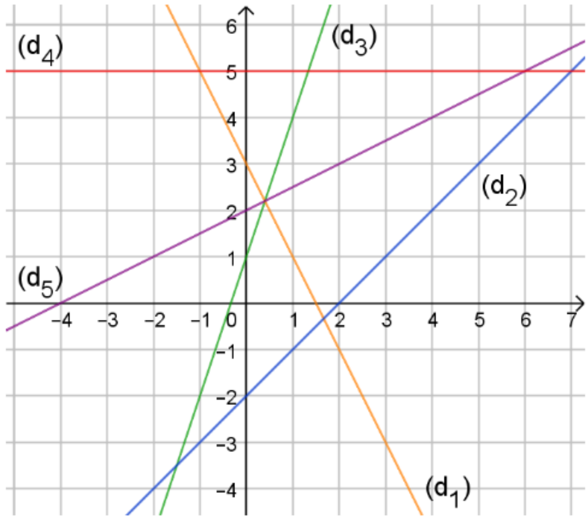
Exemple 1 Dans le repère ci-contre, placer les points $A(1; 1)$ et $B(3; -6)$, puis déterminer le coefficient directeur de la fonction affine représentée par (AB).



Exemple 2
On a représenté deux fonctions affines f et g.
Retrouver leur expression par des lectures graphiques en montrant les tracés en pointillés.



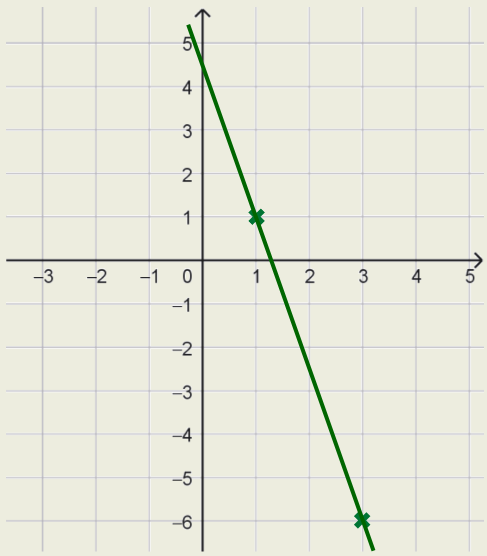
Exemple 3
Associer chaque droite à une fonction affine.



Exemple 1

On place les points A et B puis on trace la droite (AB).
Le coefficient directeur de cette droite est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6-1}{3-1} = \frac{-7}{2} = \mathbf{-3,5}$$



Exemple 2

Pour chaque fonction, il y a deux nombres à trouver :
• le coefficient directeur ***m*** *en appliquant la formule précédente entre deux points. On peut parfois trouver plus rapidement en se demandant, «* ***de combien on monte ou descend lorsqu'on se décale de 1 unité à droite*** *».*

• l'ordonnée à l'origine ***p****, mais c'est facile : il suffit de lire l'ordonnée du* ***point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées****.*

• Pour $\mathcal{C}_f$, $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}$.
Ensuite, en utilisant par exemple les points de la droite $(1; 5)$ et $(2; 8)$:
$$\boldsymbol{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-5}{2-1} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$$
Donc $f(x) = \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2.}$

• Pour $\mathcal{C}_g$, $\boldsymbol{p} = \mathbf{5}$.
Ensuite, en utilisant par exemple les points de la droite $(2; 4)$ et $(4; 3)$:
$$\boldsymbol{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-4}{4-2} = \frac{-1}{2} = -\mathbf{0,5}$$
Donc $h(x) = -\mathbf{0,5}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}$

Exemple 3
On applique la même méthode que dans l'exemple 2. On trouve donc :
(d_1) correspond à $f(x) = -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}$
(d_2) correspond à $f(x) = \boldsymbol{x} - \mathbf{2}$
(d_3) correspond à $f(x) = \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$
(d_4) correspond à $f(x) = \mathbf{5}$
(d_5) correspond à $f(x) = \mathbf{0,5}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$

6. Taux d'accroissement

Le taux d'accroissement de f entre a et b est le nombre :

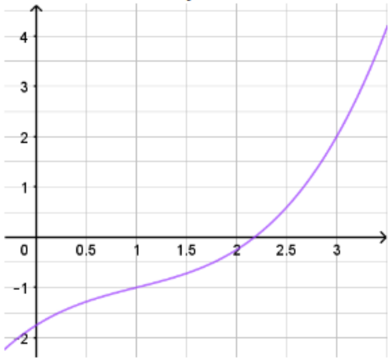
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Il sert à mesurer la croissance de f entre deux points.

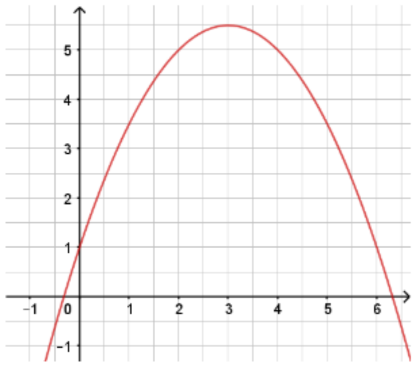
Remarque : pour une fonction affine, le taux d'accroissement est toujours le même : c'est le coefficient directeur m.

Exemple 1 : Avec une courbe

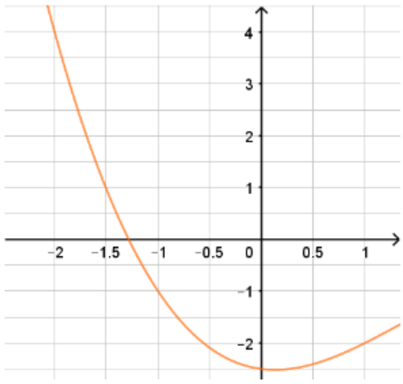
a. Calculer le taux d'accroissement de cette fonction f entre 1 et 3



b. Calculer le taux d'accroissement de cette fonction g entre 1 et 6



c. Calculer le taux d'accroissement de cette fonction h entre -2 et 1



Exemple 2 : Avec l'expression

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.
Le coût de production, en dizaines d'euros, de t tonnes de peinture, est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;20]$ par $C(t)=5t^2-10t+245$.

a. Calculer le coût pour 8 tonnes de peinture.

b. Calculer le coût supplémentaire moyen par tonne si l'entreprise produit 4 tonnes de plus.

Exemple 1

a. $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{2-(-1)}{3-1}=\dfrac{3}{2}=\mathbf{1,5}$

b. $\dfrac{g(6)-g(1)}{6-1}=\dfrac{1-3{,}5}{6-1}=\dfrac{-2{,}5}{5}=\mathbf{-0,5}$

c. $\dfrac{h(1)-h(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{-2-4}{1-(-2)}=\dfrac{-6}{3}=\mathbf{-2}$

Exemple 2 a. $C(8)=5\times 8^2-10\times 8+245=320-80+245=485$ dizaines d'euros, soit **4 850 €.**

b. Il s'agit de calculer le taux d'accroissement entre 8 et 12.
Or $f(12)=5\times 12^2-10\times 12+245=845$. Ainsi :

$$\frac{f(12)-f(8)}{12-8}=\frac{845-485}{12-8}=\frac{360}{4}=90$$

Ainsi, le coût moyen est de 90 dizaines d'euros par tonne, soit **900€.**