

Chapitre 9 – Fonction dérivée

1. Définition

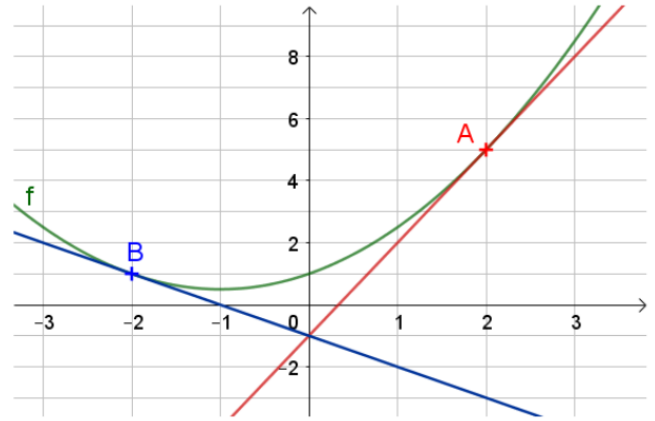
1a. Rappels sur le nombre dérivé

Rappel sur le nombre dérivé :

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f

Lire les images $f(-2) =$ et $f(2) =$

Lire les nombres dérivés $f'(-2) =$ et $f'(2) =$



Pour lire les images, il faut « juste » lire l'ordonnée des points donc l'abscisse est donnée.

Avec le point B, on lit $f(-2) = 1$ et avec le point A, on lit $f(2) = 5$.

Pour lire les nombres dérivés, il faut lire les coefficients directeurs des tangentes tracées en B et A.

On trouve $f'(-2) = -1$ et $f'(2) = 3$.

1b. Fonction dérivée

Définition : La fonction qui à tout nombre x associe le nombre dérivé de f s'appelle la **fonction dérivée $f'(x)$** .
Le **signe de $f'(x)$** renseigne sur les **variations de f** .

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles :

fonction $f(x)$	$k \in \mathbb{R}$	x	x^2	x^3
dérivée $f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$

1c. Dérivée et opérations

Pour deux fonctions f et g , et un réel k :

- la dérivée de kf est kf'
- la dérivée de $f + g$ est $f' + g'$
- la dérivée de $f - g$ est $f' - g'$

Exemple 1 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 + x$

2. $f(x) = x - x^3$

3. $f(x) = 7x$

4. $f(x) = 9$

5. $f(x) = -3x + 5$

6. $f(x) = 5x^2$

7. $f(x) = 9 - x^2$

8. $f(x) = 5x^3$

9. $f(x) = 4x^2 - 9x + 1$

10. $f(x) = -7x^3 - 7x$

11. $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 8$

Exemple 2

On considère la fonction f représentée ci-contre.

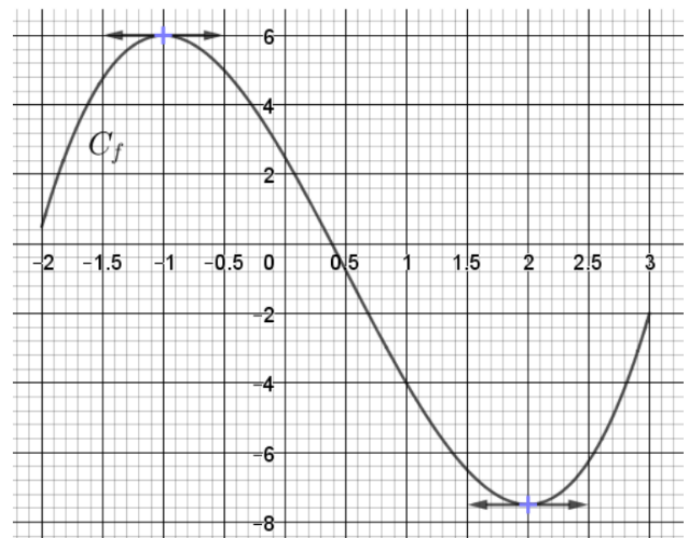
1. Déterminer graphiquement $f'(-1)$.
2. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par l'expression :

$$f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2,5$$

3. Déterminer $f'(x)$.

4. Vérifier que $f'(x) = 3(x + 1)(x - 2)$.



Exemple 1

1. La dérivée de x^2 est $2x$ et la dérivée de x est 1 , donc $f'(x) = 2x + 1$.
2. La dérivée de x est 1 et la dérivée de x^3 est $3x^2$, donc $f'(x) = 1 - 3x^2$.
3. La dérivée de x est 1 , donc $f'(x) = 7 \times 1 = 7$.
4. La dérivée d'un nombre réel constant est 0 , donc $f'(x) = 0$.
5. $f'(x) = -3 \times 1 + 0 = -3$.
6. $f'(x) = 5 \times 2x = 10x$.
7. $f'(x) = 0 - 2x = -2x$.
8. $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.
9. $f'(x) = 4 \times 2x - 9 \times 1 + 0 = 8x - 9$.
10. $f'(x) = -7 \times 3x^2 - 7 \times 1 = -21x^2 - 7$.
11. $f'(x) = 5 \times 3x^2 + 2x - 5 \times 1 - 0 = 15x^2 + 2x - 5$.

Exemple 2

1. Sur la courbe, on voit qu'en -1 , la tangente est horizontale. Ainsi, $f'(-1) = 0$.

2. Il s'agit donc de déterminer les points de la courbe où la tangente est horizontale. C'est aussi le cas en 2. Donc $S = \{-1; 2\}$.

3. $f'(x) = 3x^2 - 1,5 \times 2x - 6 \times 1 + 0 = 3x^2 - 3x - 6$

4. *Développons l'expression proposée et vérifions qu'on retombe bien sur $f'(x)$.*

$$3(x + 1)(x - 2)$$

$$= (3x + 3)(x - 2)$$

$$= 3x \times x - 3x \times 2 + 3 \times x - 3 \times 2$$

$$= 3x^2 - 6x + 3x - 6$$

$$= 3x^2 - 3x - 6$$

2. Variations d'une fonction

2a. Signe de la dérivée

Propriété :

- Si $f'(x)$ est positif, alors f est croissante.
- Si $f'(x)$ est négatif, alors f est décroissante.

Exemple 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 14x + 3$.

Déterminer sa fonction dérivée, étudier le signe de la dérivée, et en déduire les variations de f .

Exemple 2 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ par $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [-3; 3]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-3; 3]$, on a $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-3; 3]$, et en déduire les variations de f sur cet intervalle.
4. Soit (d) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Donner l'équation réduite de la droite (d) .

Exemple 3 Le prix de l'immobilier varie au cours du temps. Le graphique donne le prix moyen du m^2 en euros, en fonction du nombre d'années à partir du premier janvier 2000.

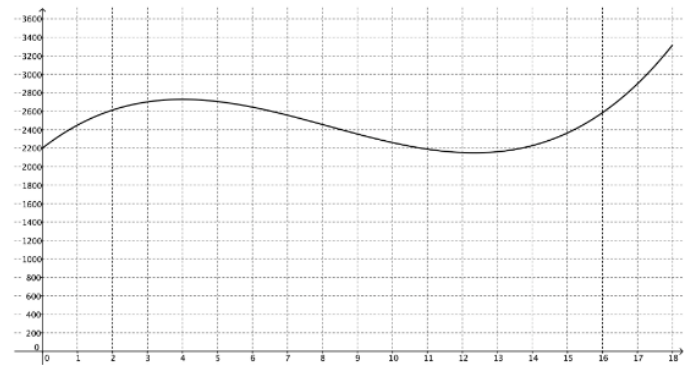
Cette courbe représente la fonction f avec :

$$f(x) = 2x^3 - 49x^2 + 296x + 2\,200.$$

1. Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2\,400$.

Interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
3. a. Montrer que : $f'(x) = (x - 4)(6x - 74)$.
b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
c. Interpréter les solutions de cette équation en termes de tangentes à la courbe de f .
d. Dresser le tableau de variations de f .



Exemple 1

- On a $f(x) = 5x^2 - 14x + 3$.

La dérivée est donc $f'(x) = 5 \times 2x - 14 \times 1 + 3 \times 0 = 10x - 14$

- Dressons le tableau de signes de la dérivée.

$$10x - 14 = 0 \Leftrightarrow 10x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{10} = 1,4$$

et le coefficient directeur 10 est positif.

On en déduit le tableau de signes :

Le signe du coefficient directeur (ici 10) est toujours à droite.

- On ajoute une ligne au tableau de signes de $f'(x)$ pour en déduire les variations de f .

x	$-\infty$	$1,4$	$+\infty$
$10x - 14$	-	0	+
f			

Exemple 2

1. On a $f(x) = x^3 - 12x + 1$. Donc $f'(x) = 3x^2 - 12 \times 1 + 1 \times 0 = 3x^2 - 12$.

2. On développe l'expression proposée par l'énoncé.

$$3(x - 2)(x + 2)$$

$$= (3x - 6)(x + 2)$$

$$= 3x^2 + 6x - 6x - 12$$

$$= 3x^2 - 12$$

On retrouve bien l'expression de $f'(x)$.

3. Étudions le signe de :

$$f'(x) = 3(x - 2)(x + 2).$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

On dresse un tableau de signes

avec une ligne par facteur.

On donne ensuite le signe du produit, et les variations de f .

4. On utilise la formule de cours : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

L'équation de la tangente est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\text{Or } f'(1) = 3 \times 1^2 - 12 = -9 \text{ et } f(1) = 1^3 - 12 \times 1 + 1 = -10.$$

$$\text{Donc l'équation est } y = -9(x - 1) - 10 = -9x + 9 - 10 = -9x - 1$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Exemple 3

1. On trace des pointillés d'ordonnée 2 400. Ils coupent la courbe trois fois, donc l'équation $f(x) = 2\,400$ a **trois solutions**. Cela signifie que le prix moyen de l'immobilier a été de 2 400€ par m^2 à trois reprises depuis l'année 2000.

2. On a $f(x) = 2x^3 - 49x^2 + 296x + 2\,200$

$$\text{donc } f'(x) = 2 \times 3x^2 - 49 \times 2x + 296 \times 1 = 6x^2 - 98x + 296.$$

3a. On développe l'expression proposée.

$$(x - 4)(6x - 74)$$

$$= x \times 6x - x \times 74 - 4 \times 6x + 4 \times 74$$

$$= 6x^2 - 74x - 24x + 296$$

$$= 6x^2 - 98x + 296$$

On retrouve bien l'expression de $f'(x)$.

$$3b. f'(x) = (x - 4)(6x - 74).$$

$$\text{Or } x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{et } 6x - 74 = 0 \Leftrightarrow 6x = 74 \Leftrightarrow x = \frac{74}{6} \approx 12,33.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f'(x) = 0$

sont **4 et $\frac{74}{6}$** .

3c. Ainsi, les tangentes aux points d'abscisses

4 et $\frac{74}{6}$ sont **horizontales**.

3d. On a déjà trouvé les racines de f , il ne reste plus qu'à dresser le tableau.

x	$-\infty$	4	$\frac{74}{6}$	$+\infty$	
$x - 4$	$-$	$-$	0	$+$	
$6x - 74$	$-$	0	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

2b. Extremums locaux

Si en un nombre a , $f'(x)$ s'annule en changeant de signe, alors on dit que f admet un extremum local en a (minimum ou maximum).

La tangente de f en a est donc horizontale.

Exemple 1 Le chiffre d'affaires en milliers d'euros d'une entreprise en fonction du temps est modélisé par la fonction $f(x) = 3x(48x - 5x^2)$ où x exprimé en années est le temps écoulé depuis le 1^{er} janvier 2020.

- Développer $f(x)$, puis en déduire $f'(x)$.
- On admet que $f'(x) = -3x(15x - 96)$. Dresser le tableau de variations de f .
- En déduire le chiffre d'affaires maximal. En quelle année est-il atteint ?

Exemple 2 La glycémie est la concentration massique exprimée en gramme par litre de sucre dans le sang. Le diabète se caractérise par une hyperglycémie chronique, c'est-à-dire un excès de sucre dans le sang et donc une glycémie trop élevée.

Une glycémie est normale lorsqu'elle est comprise entre 0,7 g/L et 1,1 g/L à jeun et lorsqu'elle est inférieure à 1,4 g/L, une heure et trente minutes après un repas.

Lorsque l'on suspecte un diabète, on pratique un test de tolérance au glucose. Lorsqu'il est à jeun, le patient ingère 75 g de glucose au temps $t = 0$ (t est exprimé en heure).

Pour tout réel t de l'intervalle $[0; 3]$, la glycémie du patient, exprimée en g/l, t heures après l'ingestion, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(t) = 0,3t^3 - 1,8t^2 + 2,7t + 0,8$$

- Que valait la glycémie du patient à jeun ?
- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0; 3]$,
$$f'(t) = 0,9(t - 1)(t - 3)$$
 - Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0; 3]$ et en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.
 - Au bout de combien d'heures la glycémie du patient est-elle maximale et que vaut-elle ?
 - Peut-on suspecter un diabète chez le patient ? Expliquer.

Exemple 1

a. $f(x) = 3x(48x - 5x^2) = 3x \times 48x - 3x \times 5x^2 = 72x^2 - 15x^3$

On peut alors calculer $f'(x) = 72 \times 2x - 15 \times 3x^2 = 144x - 45x^2$

b. D'après l'énoncé, $f'(x) = -3x(15x - 96)$.

Or $-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{-3} = 0$

et $15x - 96 = 0 \Leftrightarrow 15x = 96 \Leftrightarrow x = \frac{96}{15} = 6,4$

On peut donc dresser le tableau de signes, puis le tableau de variations.

Attention, dans $-3x$, le signe du coefficient directeur est négatif.

x	$-\infty$	0	6, 4	$+\infty$	
$-3x$	+	0	-	-	
$5x - 96$	-	-	0	+	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f					

c. D'après le tableau, le maximum de la fonction f est atteint pour $x = 6,4$.

Ce maximum vaut $f(6,4) = 3 \times 6,4(48 \times 6,4 - 5 \times 6,4^2) = 1\,966,08$.

Il est exprimé en milliers, donc le chiffre d'affaires maximal est 1 966 080€.

Il est atteint pour $x = 6,4$, soit au cours de l'année 2026.

Exemple 2

1. On calcule la glycémie pour $t = 0$.

$$f(0) = 0,3 \times 0^3 - 1,8 \times 0^2 + 2,7 \times 0 + 0,8 = \mathbf{0,8 \text{ g/L}}$$

2a. On dérive la fonction $f(t) = 0,3t^3 - 1,8t^2 + 2,7t + 0,8$.

$$f'(t) = 0,3 \times 3t^2 - 1,8 \times 2t + 2,7 \times 1 = \mathbf{0,9t^2 - 3,6t + 2,7}$$

On développe l'expression proposée par l'énoncé.

$$0,9(t - 1)(t - 3)$$

$$= (0,9t - 0,9)(t - 3)$$

$$= 0,9t \times t - 0,9t \times 3 - 0,9 \times t + 0,9 \times 3$$

$$= 0,9t^2 - 2,7t - 0,9t + 2,7$$

$$= 0,9t^2 - 3,6t + 2,7$$

On retrouve l'expression de $f'(t)$. Donc $f'(t) = \mathbf{0,9(t - 1)(t - 3)}$.

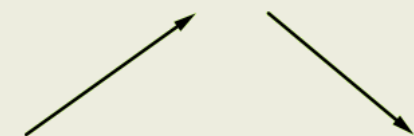
2b. On dresse le tableau de signes de $f'(t)$.

$$t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \mathbf{1} \text{ et } t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \mathbf{3}.$$

Attention, l'intervalle de définition est $[0; 3]$.

On en déduit les variations de f .

t	0	1	3
$t - 1$	—	0	+
$t - 3$	—	—	0
$f'(t)$	+	0	—
f			



3a. D'après le tableau, la glycémie est maximale pour $t = 1$, c'est-à-dire au bout d'une heure. Elle vaut :

$$f(1) = 0,3 \times 1^3 - 1,8 \times 1^2 + 2,7 \times 1 + 0,8$$

$$f(1) = 0,3 - 1,8 + 2,7 + 0,8$$

$$f(1) = \mathbf{2 \text{ g/L}}$$

3b. La glycémie est normale lorsqu'elle est inférieure à 1,4 g/L une heure trente après le repas. Or ici, elle est largement supérieure à 2 g/L une heure après le repas. On peut **suspecter un diabète** chez le patient.

On peut également calculer $f(1,5)$ pour connaître la glycémie au bout d'une heure trente, ce qui donne 1,8125 g/L et valide notre supposition.