Chapitre 10 – Évolutions

Dans ce cours, on considère une quantité q_1 qui évolue en une quantité q_2.

$$\begin{tikzcd} q_1 \arrow[r, bend left] & q_2 \end{tikzcd}$$

1. Taux d'évolution et coefficient

1a. Taux d'évolution

Le taux d'évolution de q_1 à q_2 est le nombre :

$$t = \frac{q_2 - q_1}{q_1}$$

Il indique de combien a évolué q_1 par rapport à sa valeur de départ.
Il est positif en cas d'augmentation, et négatif en cas de diminution.

Exemple 1 Un grand fabricant de chaussures disposait de 1 400 magasins dans le monde en 2016. En 2019, ce nombre est passé à 1 680. Quel est le taux d'évolution ? Donner la réponse en pourcentage.

Exemple 2 Une paire de chaussures initialement vendue à 87,99€ a été soldée à 40€.
Donner le taux d'évolution en pourcentage, arrondi à l'unité.

Exemple 3 Une boulangerie a vendu 400 baguettes un vendredi, mais en a vendu 260 un samedi. Quel est le taux d'évolution ?

Exemple 4 Il y avait en France 5 530 600 demandeurs d'emploi au troisième trimestre 2019.
Ce nombre est passé à 5 442 900 au dernier trimestre. Quel est le taux d'évolution en pourcentage, arrondi à 0,01 % ?

Exemple 1 *Sans calculatrice ? On applique la formule, puis on simplifie la fraction (on peut l'écrire sur 10 ou sur 100), et enfin on donne la réponse en pourcentage.*

$$t = \frac{1\,680 - 1\,400}{1\,400} = \frac{280}{1400} = \frac{28}{140} = \frac{14 \times 2}{14 \times 10} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = +\mathbf{20}\%$$

Exemple 2 *On fait bien attention à toujours diviser par la « quantité de départ » (ici, $q_1 = 87{,}99$) donnée par l'énoncé.*

$$t = \frac{40 - 87{,}99}{87{,}99} = -\frac{47{,}99}{87{,}99} \approx -0{,}55 \approx -\mathbf{55}\%$$

Exemple 3 $t = \dfrac{260 - 400}{400} = -\dfrac{140}{400} = -\dfrac{14}{40} = -\dfrac{7}{20} = -\dfrac{35}{100} = -0{,}35 = -\mathbf{35}\%$

Exemple 4 *Pour l'arrondi demandé, il nous faut 4 chiffres après la virgule.*

$$t = \frac{5\,442\,900 - 5\,530\,600}{5\,530\,600} = -\frac{87\,700}{5\,530\,600} \approx -0{,}015\,9 \approx -\mathbf{1{,}59}\%$$

1b. Coefficient

Le coefficient multiplicateur de q_1 à q_2 est le nombre

$$c = \frac{q_2}{q_1}$$

Il indique par combien on a multiplié q_1 pour arriver à q_2.

$$q_1 \xrightarrow{\times c} q_2$$

Exemple 1 Dans chaque cas, calculer le taux d'évolution et le coefficient, en arrondissant au centième.

a. La fréquentation d'un stade est passée de 5 120 à 7 530.

b. Un pull coûtait 35€, mais son prix a baissé à 21€.

c. Le temps moyen passé sur un écran est de 5h07 par jour, contre 3h10 il y a dix ans.

Remarques :

- le coefficient est **supérieur à 1 en cas d'augmentation**, et **inférieur à 1 en cas de diminution**.
- si c représente un coefficient et t un taux d'évolution, $\boldsymbol{c = t + 1}$ et donc $\boldsymbol{t = c - 1}$.

Exemple 2 Déterminer le coefficient associé…

a. …à une augmentation de $+47\%$ **b.** …à une diminution de -19%

Exemple 3 Le nombre d'habitants d'une ville a été multiplié par 0,76 en trente ans.
Quelle évolution la population de cette ville a-t-elle subi ?

Exemple 1

a. $t = \frac{7\,530 - 5\,120}{5\,120} = \frac{2\,410}{5\,120} \approx \mathbf{0,47} \approx +\mathbf{47}\%$ $\quad c = \frac{7\,530}{5\,120} \approx \mathbf{1,47}$

b. $t = \frac{21 - 35}{35} = -\frac{14}{35} = -\frac{2}{5} = -\mathbf{0,4} = -\mathbf{40}\%$ $\quad c = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = \mathbf{0,6}$

c. On convertit ces temps en minutes : 5h07 = 307 min et 3h10 = 190 min.

$t = \frac{307 - 190}{190} = \frac{117}{190} \approx \mathbf{0,62} \approx +\mathbf{62}\%$ $\quad c = \frac{307}{190} \approx \mathbf{1,62}$

Exemple 2

a. Le taux d'évolution est de 0,47, donc le coefficient est $0{,}47 + 1 = \mathbf{1,47}$

b. Le taux d'évolution est de – 0,19, donc le coefficient est $-0{,}19 + 1 = \mathbf{0,81}$

Exemple 3

Le coefficient est 0,76,
donc le taux d'évolution est $t = 0{,}76 - 1 = -0{,}24 = -\mathbf{24}\%$.

2. Appliquer une évolution

On connaît q_1 et un taux d'évolution, et on cherche q_2.

$$q_1 \xrightarrow{\pm p\%} \dots$$

2a. Déterminer le coefficient

Augmenter q_1 de $p\%$ revient à la multiplier par le coefficient $\left(1+\frac{p}{100}\right)$

Diminuer q_1 de $p\%$ revient à la multiplier par le coefficient $\left(1-\frac{p}{100}\right)$

Exemple 1 Le prix de vente moyen d'un téléphone était de 313\$ en 2017, mais il a augmenté de 9% l'année suivante. Quel est le prix de vente moyen en 2018 ?

Exemple 2 En France, la TVA est de 20%. Un magasin d'équipement de bureau vend une imprimante à 74 € hors taxe. Quel est le prix toutes taxes comprises ?

Exemple 3 Julien obtient 15% de réduction sur un vélo électrique valant 500 € pour les soldes. À combien pourra-t-il acheter ce vélo ?

Exemple 4 Une ville comportait 51 120 habitants en 2010, et sa population a augmenté de 7,3% en dix ans. Quelle est sa population maintenant ? Arrondir à l'unité.

Exemple 5 Un costume est habituellement vendu 278€, mais son prix baisse de 35,6%. Quel est le prix soldé ?

Exemple 6 Le nombre d'inscrits à une formation était de 65 dans sa première année, mais ce nombre a ensuite connu une forte augmentation de 140% l'année suivante. Combien y avait-t-il d'inscrits cette année ?

Ici, le calcul des coefficients est détaillé, mais il faut savoir calculer les coefficients d'évolution de tête (par exemple, savoir immédiatement qu'une augmentation de 9% correspond à un coefficient de 1,09).

Exemple 1 Le coefficient d'augmentation est $1+\frac{9}{100}=1+0{,}09=1{,}09$

On calcule donc $313\times 1{,}09=\mathbf{341{,}17}$\$.

Exemple 2 Le coefficient d'augmentation est $1+\frac{20}{100}=1+0{,}2=1{,}20$

On calcule donc $74\times 1{,}2=\mathbf{88{,}80}$ €.

Sans calculatrice, on peut aussi calculer 20% de 74€, c'est-à-dire 74 divisé par 5 (ce qui fait 12,8) pour ajouter ce résultat au prix de départ.

Exemple 3 Le coefficient de réduction est $1-\frac{15}{100}=1-0{,}15=0{,}85$

On calcule donc $500\times 0{,}85=\mathbf{425}$ €.

Sans calculatrice, on peut aussi calculer 15% de 500€ : en effet, 10% de 500€ correspond à 50€, donc 15% correspond à 75€. On soustrait ces 75€ des 500€.

Exemple 4 Le coefficient d'augmentation est $1 + \frac{7,3}{100} = 1 + 0,073 = 1,073$
On calcule donc $51\,120 \times 1,073 \approx \mathbf{54\,852}$ habitants.

Exemple 5 Le coefficient de réduction est $1 - \frac{35,6}{100} = 1 - 0,356 = 0,644$
On calcule donc $278 \times 0,644 \approx \mathbf{179,03}$ €.

Exemple 6 *Une augmentation de plus de 100% signifie que la quantité a plus que doublé.* Le coefficient d'augmentation est $1 + \frac{140}{100} = 1 + 1,40 = 2,4$
On calcule donc $65 \times 2,4 = \mathbf{156}$ inscrits.

2b. Indice base 100

Les quantités peuvent être données avec un indice base 100 qui sert de référence pour les évolutions.

Exemple 1 Le loyer d'un appartement était de 470€ en 2010. Ce loyer est choisi comme indice base 100. L'indice passe à 110 en 2015, puis à 130 en 2020. Calculer les loyers en 2015 et en 2020.

Exemple 2 Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants en France, exprimé en millions.
On prend pour indice base 100 le nombre d'habitants en 1985. Compléter le tableau.

Année	1985	1995	2005	2010
Nombre d'habitants (millions)	56,6	59,4		63,1
Indices (base 100 en 1985)	100		108	

Exemple 1
• Entre 2010 et 2015, l'indice passe de 100 à 110, donc c'est une augmentation de 10%. Le loyer initial est de 470€ or 10% de 470€ correspond à 47€.
Le loyer en 2015 est donc de 470 + 47 = **517€.**
• Entre 2010 et 2020, l'indice passe de 100 à 130, donc c'est une augmentation de 30%. Le loyer initial est de 470€ or 30% de 470€ correspond à 47 × 3 = 141.
Le loyer en 2020 est donc de 470 + 141 = **611€.**

Exemple 2
• Le coefficient entre 1985 et 1995 est $\frac{59,4}{56,6} \approx 1,05$.
L'indice en 1995 est donc **105**.
• Entre 1985 et 2005, l'indice passe de 100 à 108, donc c'est une augmentation de 8%. Le coefficient est 1,08. On calcule $56,6 \times 1,08 = \mathbf{61,128}$ millions d'habitants.
• Le coefficient entre 1985 et 2010 est $\frac{63,1}{56,6} \approx 1,11$.
L'indice en 2010 est donc **111**.

3. Évolutions successives

3a. Introduction

On considère que q_2 évolue ensuite en q_3.
On cherche à quelle évolution globale cela correspond.

$$\begin{tikzcd} q_1 \arrow[r, bend left] \arrow[rr, bend right, "\pm\,?\,\%"'] & q_2 \arrow[r, bend left] & q_3 \end{tikzcd}$$

Exemple 1 Dans une ville, le temps moyen passé par les automobilistes dans les embouteillages était de 47 minutes en janvier. Cette valeur a ensuite augmenté de 13% en février, puis de 17% en mars.
a. Calculer le temps moyen passé dans les embouteillages en mars. Arrondir à l'unité.
b. Quel est le taux d'évolution de ce temps passé entre janvier et mars ? Que remarque-t-on ?

Exemple 2 Camille touche un salaire de 2 400 € mensuels.
a. Suite à de bons résultats, son employeur l'augmente de 10%. Calculer son nouveau salaire.
b. Son employeur doit par la suite diminuer son salaire de 10%. Camille se dit « ce n'est pas grave : je retrouverai juste mon salaire d'avant ! ». Qu'en pensez-vous ?

Exemple 1
a. • Le coefficient de la première augmentation est 1,13.
On calcule donc $47 \times 1{,}13 = 53{,}11$ minutes en février.
• Le coefficient de la première augmentation est 1,17.
On calcule donc $53{,}11 \times 1{,}17 = 62{,}138\,7 \approx \mathbf{63}$ minutes en février.
b. $t = \dfrac{63 - 47}{47} = \dfrac{16}{47} \approx 0{,}34 \approx \mathbf{+34}\%$
Contrairement à ce qu'on pourrait penser, ce n'est pas la somme de 13% et 17%.

Exemple 2
a. Sans calculatrice, on calcule 10% de 2 400€, ce qui donne 240€.
On calcule ensuite $2\,400 + 240 = \mathbf{2\,640}$ €.
b. On calcule 10% du nouveau salaire : 2 640€, ce qui donne 264€.
On calcule ensuite $2\,640 - 264 = \mathbf{2\,376}$ €.
On constate que Camille n'a pas retrouvé son salaire d'avant ! Quelle arnaque.

3b. Coefficient multiplicateur global

Le coefficient multiplicateur global est le produit des deux coefficients.

$$\begin{tikzcd} q_1 \arrow[r, bend left, "\times c_1"] \arrow[rr, bend right, "\times (c_1 \times c_2)"'] & q_2 \arrow[r, bend left, "\times c_2"] & q_3 \end{tikzcd}$$

Exemple 1 Un prix augmente de 40%, puis encore de 10%. De quel pourcentage a-t-il augmenté ?

Exemple 2 Un foyer payait 74€ par mois de chauffage au gaz en 2024. Sa facture a ensuite augmenté de 12% entre 2024 et 2025, puis de 25% entre 2025 et 2026.
a. Quel est le taux d'évolution de sa facture entre 2024 et 2026 ? **b.** Quel est le montant de sa facture en 2026 ?

Exemple 3 Lors des soldes, un magasin accorde une remise de -40% sur tous les articles.
Puis, lors d'une nouvelle démarque, les prix baissent encore de -25%.
a. Un client compte acheter un manteau vendu initialement 100€.
Il se dit « le prix baisse de 40%, puis de 25%. Le manteau devrait donc me coûter 100 – 40 – 25 = 35€. »
Qu'en pensez-vous ? Calculer le pourcentage de baisse en tenant compte des deux remises.
b. Calculer le prix soldé d'un pantalon vendu 54,99€.

Exemple 4 Une voiture était initialement vendue 13 000€ neuve. Son prix a baissé de 30% l'année suivante, puis a par la suite augmenté de nouveau de 30%.
a. Quel est le prix final de la voiture ? **b.** Quel est le coefficient global ? Et le pourcentage d'évolution ?

Exemple 1
Le coefficient de la première augmentation est 1,4. Celui de la deuxième est 1,1.
Le coefficient global est donc $1{,}4 \times 1{,}1 = 1{,}4 + 0{,}14 = 1{,}54$.
Il s'agit donc d'une augmentation de $1{,}54 - 1 = 0{,}54 = +\mathbf{54}\%$.

Exemple 2 **a.** Les coefficients de ces évolutions sont 1,12 et 1,25.
On calcule $1{,}12 \times 1{,}25 = 1{,}4$. Le taux d'évolution global est donc $+\mathbf{40}\%$.
b. Le montant de la facture en 2026 est $74 \times 1{,}4 = \mathbf{103{,}60}$€.

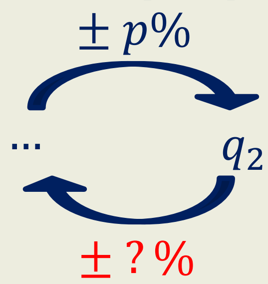
Exemple 3
a. Le coefficient de la première baisse est $1 - 0{,}4 = 0{,}6$ et celui de la deuxième baisse est $1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Le coefficient global est $0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$.
Ainsi, les deux baisses correspondent à une baisse de $0{,}45 - 1 = -\mathbf{55}\%$.
Le client a donc tort : le prix n'a pas baissé de 65%.
b. Le coefficient est de 0,45, donc $54{,}99 \times 0{,}45 \approx \mathbf{24{,}75}$€.

Exemple 4
a. Le coefficient de la baisse est $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Celui de la hausse est $1 + 0{,}3 = 1{,}3$.
Ainsi, le prix final est $13\,000 \times 0{,}7 \times 1{,}3 = \mathbf{11\,830}$€.
b. Le coefficient global est $0{,}7 \times 1{,}3 = 0{,}91$. Le pourcentage d'évolution est $0{,}91 - 1 = -0{,}09 = -\mathbf{9}\%$. Le prix de la voiture a donc baissé de 9%.

4. Évolution réciproque

4a. Introduction

On cherche comment faire en sorte que q_2 revienne à q_1.



Exemple 1 Dans une région, grâce à des actions de préventions, le nombre d'accidents de la route a baissé de 35% pour atteindre 546 accidents par an. Quel était le nombre initial d'accidents ?

Exemple 2 Le prix avec TVA d'une télévision est de 480€ (le taux de TVA ici est de 20%).
a. Déterminer le prix hors taxes de ce téléviseur. **b.** Quel est le montant de la TVA ?

Exemple 1
Le nombre d'accidents a baissé de 35%, donc le coefficient était $1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
Le nombre d'accidents a donc été multiplié par 0,65 pour arriver à 546.
On applique l'opération inverse : $\dfrac{546}{0{,}65} = \mathbf{840}$ accidents.

Exemple 2
a. Le prix de la télévision a été augmenté de 20%, le coefficient est donc 1,20.
On applique l'opération inverse : $\dfrac{480}{1{,}2} = \dfrac{4800}{12} = \dfrac{48}{12} \times 100 = 4 \times 100 = \mathbf{400}$ €.
b. Le montant de la TVA est donc $480 - 400 = \mathbf{80}$ €.

4b. Coefficient réciproque

Le coefficient réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur.

Si le coefficient est c, le coefficient réciproque est $\frac{1}{c}$.

$$\begin{tikzcd} q_1 \arrow[r, bend left, "\times c"] & q_2 \arrow[l, bend left, "\times \frac{1}{c}"] \end{tikzcd}$$

Exemple 1 Compléter les phrases suivantes :

a. L'évolution réciproque d'une augmentation de 25% est une diminution de ...

b. L'évolution réciproque d'une diminution de 15% est ...

c. L'évolution réciproque d'une augmentation de 60% est ...

d. L'évolution réciproque d'une diminution de 40% est ...

Exemple 2 Le prix d'un baril de pétrole est initialement de 71,80$, puis augmente de 45%.

a. Quel est son prix après augmentation ?

b. Après l'augmentation, comment le prix devrait-il évoluer pour revenir à sa valeur initiale ?

Exemple 3 Entre janvier et avril 2026, le prix d'une action en Bourse a été multiplié par 0,73.

a. Quel est le taux d'évolution de cette action ?

b. Calculer le taux d'évolution que devra subir cette action pour revenir à son niveau de janvier.

Exemple 1

a. On calcule $\frac{1}{1{,}25} = \frac{1\times4}{1{,}25\times4} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Ce coefficient réciproque correspond à un taux de $0{,}8 - 1 = -0{,}2$, soit une **diminution de –20%**.

b. On calcule $\frac{1}{0{,}85} \approx 1{,}18$, ce qui correspond à une **augmentation de +18%**.

c. On calcule $\frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$, ce qui correspond à une **diminution de –37,5%**.

d. On calcule $\frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}67$, ce qui correspond à une **augmentation de +67%**.

Exemple 2

a. On calcule $71{,}8 \times 1{,}45 = \mathbf{104{,}11}$**$** après augmentation.

b. On calcule $\frac{1}{1{,}45} \approx 0{,}70$, ce qui correspond à une **diminution de –30%**.

Exemple 3

a. $0{,}73 - 1 = -0{,}27$, donc l'action a **diminué de –27%**.

b. On calcule $\frac{1}{0{,}73} \approx 1{,}37$, ce qui correspond à une **augmentation de +37%**.