Chapitre 4 – Équations, inéquations, signe

1. Équations

1a. Équations linéaires

Une équation est une égalité comportant un nombre inconnu, souvent noté x.

Pour résoudre une équation, le but est d'abord de placer tous les termes en x dans un membre (souvent à gauche), et tous les autres termes dans l'autre membre (souvent à droite).

Exemple Donner l'ensemble solution de ces équations.

a. $2x + 5 = 11$ **b.** $1 - 3x = 29 + x$ **c.** $13 + 6x = 4 + 7x$ **d.** $4(x + 5) - 7x = 10x + 3$

a. $2x + 5 = 11$
$\Leftrightarrow 2x = 11 - 5$
$\Leftrightarrow 2x = 6$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{6}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3$ donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}\}$.

b. $1 - 3x = 29 + x$
$\Leftrightarrow -3x - x = 29 + 1$
$\Leftrightarrow -4x = 30$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{30}{-4}$
$\Leftrightarrow x = 7{,}5$ donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{7{,}5}\}$.

c. $13 + 6x = 4 + 7x$
$\Leftrightarrow 6x - 7x = 4 - 13$
$\Leftrightarrow -x = -9$
$\Leftrightarrow x = 9$ donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{9}\}$

d. $4(x + 5) - 7x = 10x + 3$
$\Leftrightarrow 4x + 20 - 7x = 10x + 3$
$\Leftrightarrow 4x - 7x - 10x = 3 - 20$
$\Leftrightarrow -13x = -17$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-17}{-13}$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}}\right\}$

1b. Équations $x^2 = a$

Si a est positif, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Sinon, l'équation n'admet pas de solutions.

Exemple 1 Résoudre les équations : **a.** $2x^2 - 72 = 0$ **b.** $3x^2 - 15 = 0$ **c.** $x^2 + 7 = 0$

Exemple 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 26$.

1. Calculer l'image de -10 par f.

2. Résoudre les équations suivantes : **a.** $f(x) = 10$ **b.** $f(x) = -42$ **c.** $f(x) = 18$

Exemple 1

a. $2x^2 - 72 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 72$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{72}{2}$
$\Leftrightarrow x^2 = 36$
donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{6}; -\mathbf{6}\}$

b. $3x^2 - 15 = 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 = 15$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{15}{3}$
$\Leftrightarrow x^2 = 5$
donc $\boldsymbol{S} = \{\sqrt{\mathbf{5}}; -\sqrt{\mathbf{5}}\}$

c. $x^2 + 7 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = -7$
Un carré ne peut pas être négatif. L'équation n'a pas de solution (on note $\boldsymbol{S} = \emptyset$).

Exemple 2

1. On calcule $f(-10) = 4 \times (-10)^2 - 26 = 4 \times 100 - 26 = 400 - 26 = \mathbf{374}$.

2a. $f(x) = 10$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 26 = 10$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 10 + 26$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 36$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{36}{4}$
$\Leftrightarrow x^2 = 9$
donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}; -\mathbf{3}\}$

b. $f(x) = -42$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 26 = -42$
$\Leftrightarrow 4x^2 = -42 + 26$
$\Leftrightarrow 4x^2 = -16$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-16}{4}$
$\Leftrightarrow x^2 = -4$
donc $\boldsymbol{S} = \emptyset$

c. $f(x) = 18$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 26 = 18$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 18 + 26$
$\Leftrightarrow 4x^2 = 44$
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{44}{4}$
$\Leftrightarrow x^2 = 11$
donc $\boldsymbol{S} = \{\sqrt{\mathbf{11}}; -\sqrt{\mathbf{11}}\}$

1c. Équations produit nul

Équations produit nul : un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
On sépare alors l'équation produit en plusieurs petites équations.
Attention : on ne peut faire cela que lorsque le membre de gauche est un produit, et l'autre membre est nul.

Exemple 1 **a.** $(x+7)(5x-3)=0$ **b.** $(x-1)(4-x)=0$ **c.** $-2(1-x)(3x+4)=0$

Équations quotient : il faut d'abord vérifier quelles sont les valeurs interdites : ce sont celles qui annulent le dénominateur. Ensuite, on peut par exemple effectuer un produit en croix.

Exemple 2 **a.** $\frac{x-10}{2x+6}=4$ **b.** $\frac{8+x}{3x+1}=\frac{2x-7}{6x}$

Exemple 1

a. $(x+7)(5x-3)=0$

soit $x+7=0$ soit $5x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-7$ $\Leftrightarrow 5x=3$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$

donc $\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{-7};\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}}\right\}$

b. $(x-1)(4-x)=0$

soit $x-1=0$ soit $4-x=0$

$\Leftrightarrow x=1$ $\Leftrightarrow 4=x$

donc $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{1};\boldsymbol{4}\}$

c. $-2(1-x)(3x+4)=0$

soit $1-x=0$ soit $3x+4=0$

$\Leftrightarrow -x=-1$ $\Leftrightarrow 3x=-4$

$\Leftrightarrow x=1$ $\Leftrightarrow x=\frac{-4}{3}$

donc $\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{1};-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\right\}$

Exemple 2

a. La valeur interdite vérifie $2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3$. Ensuite :

$$\frac{x-10}{2x+6}=4 \Leftrightarrow x-10=4(2x+6) \Leftrightarrow x-10=8x+24 \Leftrightarrow -7x=34 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{34}}{\boldsymbol{7}}$$

b. Il y a deux valeurs interdites : $3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

ainsi que $6x=0 \Leftrightarrow x=0$. Ensuite :

$$\frac{8+x}{3x+1}=\frac{2x-7}{6x} \Leftrightarrow 6x(8+x)=(3x+1)(2x+7)$$

$$\Leftrightarrow 48x+6x^2=6x^2+21x+2x+7 \Leftrightarrow 48x-21x-2x=7 \Leftrightarrow 25x=7 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{25}}$$

1d. Isoler une variable

Pour isoler une variable, on peut **appliquer la même opération aux deux membres de l'égalité**.

Exemple 1 On considère la formule suivante, permettant de transformer des degrés Celsius (°C) en degrés Fahrenheit (°F) : $F = 1{,}8C + 32$, où F désigne la température en °F et C désigne la température en °C.

a. L'eau bout à 100°C. Quelle est la température d'ébullition de l'eau en °F ?

b. Déterminer la formule permettant de transformer des degrés Fahrenheit en degrés Celsius.

Exemple 2 Pour y réel non nul, on pose $x = 7 + \frac{2}{y}$. Exprimer y en fonction de x.

Exemple 3 En physique, l'énergie cinétique d'un véhicule est donnée par la formule $E = \frac{1}{2}mv^2$. Exprimer v en fonction de E et m.

Exemple 1

a. On calcule $F = 1{,}8 \times 100 + 32 = 180 + 32 = 212$. L'eau bout à **212 °F**.

b. $F = 1{,}8C + 32$

$\Leftrightarrow F - 32 = 1{,}8C$

$\Leftrightarrow 1{,}8C = F - 32$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{C = \frac{F - 32}{1{,}8}}$

Exemple 2

$x = 7 + \frac{2}{y}$

$\Leftrightarrow x - 7 = \frac{2}{y}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{y} = x - 7$

On effectue alors un produit en croix pour isoler y.

$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{2}{x - 7}}$

Exemple 3

$E = \frac{1}{2}mv^2$

Pour se débarrasser de la fraction, on multiplie les deux membres par 2.

$\Leftrightarrow 2E = mv^2$

$\Leftrightarrow \frac{2E}{m} = v^2$

$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2E}{m}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2E}{m}}}$

2. Inéquations

Définition : Une inéquation est une inégalité comportant un nombre inconnu.

On suit exactement la méthode que pour les équations, <u>MAIS</u> si on doit changer le signe des deux membres ou multiplier/diviser par un nombre négatif, alors <u>le sens de l'inégalité change</u>.

Exemple Résoudre les inéquations suivantes, représenter l'ensemble solution par un intervalle.

a. $x + 2 < 3$ **b.** $-9x \geq 45$ **c.** $-4x + 7 \leq -3x - 3$ **d.** $7(x + 5) > 3(x - 4)$

a. $x + 2 < 3$

$\Leftrightarrow x < 3 - 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x < 1}$

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 1 :

$\boldsymbol{S} =] - \infty ; \mathbf{1}[$

b. $-9x \geq 45$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{45}{-9}$

$\Leftrightarrow x \leq -5$

Les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à 5 : $\boldsymbol{S} =] - \infty ; \mathbf{5}]$

c. $-4x + 7 \leq -3x - 3$

$\Leftrightarrow -4x + 3x \leq -3 - 7$

$\Leftrightarrow -x \leq -10$

$\Leftrightarrow x \geq 10$

Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à 10 :

$\boldsymbol{S} = [\mathbf{10} ; +\infty[$

d. $7(x + 5) > 3(x - 4)$

$\Leftrightarrow 7x + 35 > 3x - 12$

$\Leftrightarrow 7x - 3x > -12 - 35$

$\Leftrightarrow 4x > -47$

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{47}{4}$

Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $-\frac{47}{4}$:

$\boldsymbol{S} =] - \dfrac{\mathbf{47}}{\mathbf{4}} ; +\infty[$

3. Tableaux de signe

3a. Fonctions affines

Un tableau de signes permet de dire pour quelles valeurs de x une expression est positive ou négative.

Propriété : Soient a et b deux nombres, a non nul.

L'expression $ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ et son signe est :

- si a est positif : d'abord négatif, puis positif
- si a est négatif : d'abord positif, puis négatif

Exemple Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

a. $A(x) = 3x - 4{,}5$ **b.** $B(x) = -5x + 7$ **c.** $C(x) = -9 - 4x$

a. $3x - 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{4{,}5}{3} \Leftrightarrow x = \mathbf{1{,}5}$

Le nombre qui multiplie x (3) est **positif**, donc l'expression est d'abord **négative, puis positive**. *Le signe de ce nombre est toujours **à droite du zéro**.*

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$3x - 4{,}5$		$-$	0	$+$	

b. $-5x + 7 = 0 \Leftrightarrow -5x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{-5} \Leftrightarrow x = \mathbf{1{,}4}$

Le nombre qui multiplie x (-5) est **négatif**, donc l'expression est d'abord **positive, puis négative**.

x	$-\infty$		$1{,}4$		$+\infty$
$-5x + 7$		$+$	0	$-$	

c. $-9 - 4x = 0 \Leftrightarrow -4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{-4} \Leftrightarrow x = \mathbf{-2{,}25}$

Le nombre qui multiplie x (-4) est **négatif**, donc l'expression est d'abord **positive, puis négative**.

x	$-\infty$		$-2{,}25$		$+\infty$
$-9x - 4$		$+$	0	$-$	

3b. Produits et quotients

<u>Produits et quotients</u> : pour dresser leurs tableaux de signe, on rajoute **une ligne par facteur**, et on en déduit le signe du produit/quotient à l'aide de la règle des signes.
Penser à ajouter une double barre pour les valeurs interdites (les « 0 » du dénominateur).

Exemple Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

a. $A(x) = (2x-9)(-10x+7)$ **b.** $B(x) = \frac{7x+1}{8-2x}$

c. $C(x) = -3(x+5)(x-4)$ **d.** $D(x) = -(2x+1)(7-x)$

a. $2x-9=0 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x=\mathbf{4,5}$

et $-10x+7=0 \Leftrightarrow -10x=-7 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{-10} \Leftrightarrow x=\mathbf{0,7}$

On dresse le tableau en faisant attention, à chaque fois, au ***signe du nombre qui multiplie x*** *: ce signe est toujours* ***à droite du 0****.*

x	$-\infty$		$0,7$		$4,5$		$+\infty$
$2x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$-10x+7$		$+$	0	$-$		$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $7x+1=0 \Leftrightarrow 7x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$

et $8-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x=\mathbf{4}$

On placera donc une double barre en face du 4.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		4		$+\infty$
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$8-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

c. $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{-5}$
et $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{4}$
On applique la même méthode, mais attention, il y a un autre facteur : le -3 devant les deux parenthèses. ***Ce -3 est toujours négatif*** *(sa valeur ne dépend pas de x).*
On ajoute donc une ligne pour en tenir compte.

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
-3		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d. $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} = \mathbf{-0{,}5}$
et $7 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -7 \Leftrightarrow x = \mathbf{7}$
De même qu'en **c**, *ici la première parenthèse est* ***précédée d'un signe $-$***, *ce qui changera le signe de l'expression $D(x)$.*
On peut dresser le tableau de signes de $(2x+1)(7-x)$ sans le signe $-$,
puis en déduire le signe de $D(x)$.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		7		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$7-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+1)(7-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-0{,}5$		7		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	