Chapitre 2 – Calcul algébrique

1. Techniques de calcul

1a. Opérations sur les fractions

Pour **additionner ou soustraire** deux fractions, elles doivent avoir le **même dénominateur.**
Ensuite, on additionne ou soustrait les numérateurs, et on conserve le dénominateur.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Exemple 1 Calculer : $A=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}$ $\qquad B=\frac{7}{20}-\frac{-9}{5}$ $\qquad C=\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{10}$

Pour **multiplier** deux fractions, il n'est pas nécessaire qu'elles aient le même dénominateur.
On multiplie **les numérateurs entre eux**, et **les dénominateurs entre eux**. Puis on simplifie.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$$

Les nombres entiers peuvent être considérés comme des fractions de dénominateur 1.

Exemple 2 Calculer : $A=\frac{5}{3}\times\frac{6}{7}$ $\qquad B=4\times\frac{-5}{8}$ $\qquad C=\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}-2$

Pour **diviser** deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la deuxième.
On peut enchaîner toutes ces opérations en respectant les **priorités**.

Exemple 3 Calculer : $A=\frac{7}{\frac{2}{5}}$ $\qquad B=1+\frac{-2}{3}\times\frac{7}{12}$ $\qquad C=\left(4+\frac{7}{5}\right)\times\frac{-10}{3}$

Exemple 1

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}-\frac{7}{12} \\ &= \frac{4}{12}-\frac{7}{12} \\ &= -\frac{3}{12} \\ &= -\mathbf{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{7}{20}-\frac{-9}{5} \\ &= \frac{7}{20}+\frac{9}{5} \\ &= \frac{7}{20}+\frac{36}{20} \\ &= \mathbf{\frac{43}{20}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{10} \\ &= \frac{8}{20}+\frac{15}{20}-\frac{2}{20} \\ &= \mathbf{\frac{21}{20}} \end{aligned}$$

Exemple 2

$$A = \frac{5}{3} \times \frac{6}{7}$$
$$= \frac{30}{21}$$
$$= \mathbf{\frac{10}{7}}$$

$$B = \frac{4}{1} \times -\frac{5}{8}$$
$$= -\frac{20}{8} + \frac{9}{5}$$
$$= -\mathbf{\frac{5}{2}}$$

$$C = \frac{7}{5} \times \frac{3}{2} - \frac{2}{1}$$
$$= \frac{21}{10} - \frac{20}{10}$$
$$= \mathbf{\frac{1}{10}}$$

Exemple 3

$$A = \frac{7}{\frac{2}{5}}$$
$$= 7 \times \frac{5}{2}$$
$$= \mathbf{\frac{35}{2}}$$

$$B = 1 + \frac{-2}{3} \times \frac{7}{12}$$
$$= 1 - \frac{14}{36}$$
$$= \frac{36}{36} - \frac{14}{36}$$
$$= \frac{22}{36}$$
$$= \mathbf{\frac{11}{18}}$$

$$C = \left(\frac{4}{1} + \frac{7}{5}\right) \times \frac{-10}{3}$$
$$= \left(\frac{20}{5} + \frac{7}{5}\right) \times \frac{-10}{3}$$
$$= \frac{27}{5} \times \frac{-10}{3}$$
$$= \frac{-270}{15}$$
$$= \frac{-90}{5}$$
$$= \mathbf{-18}$$

1b. Formules sur les puissances

Soient a un réel non nul et m, n deux entiers. Alors :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois} \qquad \text{et} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

Définition : Un nombre décimal peut être écrit sous la forme $a \times 10^n$ où $a \in [1; 10[$ et n est un entier. Il s'agit de la notation scientifique.

Remarques :
- $\boldsymbol{a^n}$ **est négatif** si et seulement si $\boldsymbol{a}$ **est négatif** et $\boldsymbol{n}$ **est un nombre impair**.
- un nombre à la **puissance 1** est toujours **égal à lui-même** : $8^1 = 8$.
- un nombre non nul à la **puissance 0** est toujours **égal à 1** : $4^0 = 1^0 = (-3)^0 = 1$.
- les puissances sont **prioritaires sur les autres opérations** : $2 \times 4^3 = 2 \times 4 \times 4 \times 4$

Exemple 1 Calculer : $A = 2^7$; $B = 10^5$; $C = 5^{-2}$; $D = (-10)^3$

Exemple 2 Exprimer chaque expression sous la forme a^n, où a est un réel et n un entier.

$A = 9^2 \times 9^3$; $B = \frac{42^5}{42^3}$; $C = (8^4)^3$; $D = \frac{8^3 \times 8^{-5} \times 8^7}{8^6}$; $E = ((-4)^5)^3 \times (-4)^7$

Remarque : La notation scientifique ne doit comporter **qu'un seul chiffre non nul à gauche de la virgule.**

Exemple 3 Écrire les nombres suivants en notation scientifique.

$A = 851\,000$ $B = 6\,000\,000$ $C = 0{,}000\,81$ $D = 413 \times 10^4$ $E = 0{,}269 \times 10^{-5}$

Exemple 1

$A = 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \mathbf{128}$

$B = 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \mathbf{100\,000}$

$C = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \mathbf{0,04}$

$D = (-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = \mathbf{-1000}$

Exemple 2

$A = 9^2 \times 9^3 = 9^{2+3} = \mathbf{9^5}$ $\qquad B = \frac{42^5}{42^3} = 42^{5-3} = \mathbf{42^2}$

$C = (3{,}1^4)^3 = 3{,}1^{4\times 3} = \mathbf{3,1^{12}}$

$D = \frac{8^3 \times 8^{-5} \times 8^7}{8^6} = \frac{8^{3+(-5)+7}}{8^6} = \frac{8^5}{8^6} = 8^{5-6} = \mathbf{8^{-1}}$

$E = ((-4)^5)^3 \times (-4)^7 = (-4)^{5\times 3} \times (-4)^7 = (-4)^{5\times 3+7} = \mathbf{(-4)^{22}}$

Exemple 3

$A = 851\,000 = \mathbf{8,51 \times 10^5}$ $\qquad B = 6\,000\,000 = \mathbf{6 \times 10^6}$

$C = 0{,}000\,81 = \mathbf{8,1 \times 10^{-4}}$

$D = 413 \times 10^4 = 4{,}13 \times 10^2 \times 10^4 = \mathbf{4,13 \times 10^6}$

$E = 0{,}269 \times 10^{-5} = 2{,}69 \times 10^{-1} \times 10^{-5} = \mathbf{2,69 \times 10^{-6}}$

1c. Expressions littérales

Une expression littérale est une suite de calculs où des nombres sont représentés par des lettres.

Exemple 1 **1.** Calculer pour $x = 5$: $A = x + x^2$ $B = 2x^2$ $C = (2x)^2$

2. Calculer pour $y = -7$: $D = 4 - y$ $E = y^2$ $F = y(9 + y)$

3. Calculer pour $z = -1{,}5$: $G = 2z + 7$ $H = 7(z - 2)$ $I = -10z$

Exemple 2 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = 2x^2 + 3x$.
Calculer $g(9)$, $f(-7)$, $g(-1)$, $f\left(\frac{7}{6}\right)$ et $g\left(\frac{1}{4}\right)$.

Exemple 1

1. $A = 5 + 5^2 = 5 + 25 = \mathbf{30}$

$B = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = \mathbf{50}$ *Le carré est prioritaire sur la multiplication.*

$C = (2 \times 5)^2 = 10^2 = \mathbf{100}$

Ici, à cause des parenthèses, la multiplication redevient prioritaire.

2. *Quand on remplace une lettre par un nombre négatif, on met toujours ce nombre entre parenthèses pour éviter les erreurs.*

$D = 4 - (-7) = 4 + 7 = \mathbf{11}$

$E = (-7)^2 = (-7) \times (-7) = \mathbf{49}$ *Un carré est toujours positif.*

$F = -7\big(9 + (-7)\big) = -7 \times 2 = \mathbf{-14}$

On calcule d'abord la somme $9 + (-7)$ entre parenthèses.

3. $G = 2 \times (-1{,}5) + 7 = -3 + 7 = \mathbf{4}$

$H = 7(-1{,}5 - 2) = 7 \times (-3{,}5) = \mathbf{-24,5}$

$I = -10 \times (-1{,}5) = \mathbf{15}$

Exemple 2

- $g(9) = 2 \times 9^2 + 3 \times 9 = 2 \times 81 + 3 \times 9 = 162 + 27 = \mathbf{189}$
- $f(-7) = 3 \times (-7) - 5 = -21 - 5 = \mathbf{-26}$
- $g(-1) = 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) = 2 \times 1 + 3 \times (-1) = 2 - 3 = \mathbf{-1}$
- $f\left(\frac{7}{6}\right) = 3 \times \frac{7}{6} - 5 = \frac{21}{6} - 5 = \frac{7}{2} - 5 = 3{,}5 - 5 = \mathbf{-1,5}$
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} + \frac{3}{4} = \frac{2}{16} + \frac{12}{16} = \frac{14}{16} = \mathbf{\frac{7}{8}}$

2. Distributivité

2a. Développer

Propriété : soient k, a et b trois réels. Alors :

$$k(a+b)=ka+kb \text{ et } k(a-b)=ka-kb$$

La distributivité sert :
- à transformer un produit en somme (développer)
- à transformer une somme en produit (factoriser)

Pour développer un produit, on multiplie **chaque terme de la somme** entre parenthèses par le **facteur commun**. On applique bien la **règle des signes** pour les multiplications.

Exemple 1 Développer les expressions suivantes :

$A=5(x+7)$ $\quad B=(3-y)\times 7$ $\quad C=11(2+3x)$ $\quad D=x(2y-10)$

$E=2x(x+11)$ $\quad F=-5x(9+x)$ $\quad G=-4(3-a)$ $\quad H=-x(-x^2+5x+1)$

En l'absence de multiplications :
- Si une parenthèse est précédée d'un **signe +**, on peut supprimer la parenthèse **sans changer les signes**.
- Mais si elle est précédée d'un **signe –**, il faut **changer les signes de son contenu**.

Exemple 2 Développer et réduire : $A=-(3x-7)+(x-4+2x^2)$ $\quad B=-3(x+2)-(7-x)+(x-4)$

Exemple 1

$$\begin{aligned} A &= 5(x+7)\\ &= 5\times x+5\times 7\\ &= \mathbf{5x+35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3-y)\times 7\\ &= 7\times 3-7\times y\\ &= \mathbf{21-7y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 11(2+3x)\\ &= 11\times 2+11\times 3x\\ &= \mathbf{22+33x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= x(2y-10)\\ &= x\times 2y-x\times 10\\ &= \mathbf{2xy-10x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 2x(x+11)\\ &= 2x\times x+2x\times 11\\ &= \mathbf{2x^2+22x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= -5x(9+x)\\ &= -5x\times 9+(-5x)\times x\\ &= \mathbf{-45x-5x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= -4(3-a)\\ &= -4\times 3-(-4)\times a\\ &= \mathbf{-12+4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -x(-x^2+5x+1)\\ &= -x\times(-x^2)+(-x)\times 5x+(-x)\times 1\\ &= \mathbf{x^3-5x^2-x} \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} A &= -(3x-7)+(x-4+2x^2)\\ &= -3x+7+x-4-2x^2\\ &= \mathbf{-2x^2-2x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -3(x+2)-(7-x)+(x-4)\\ &= -3\times x+(-3)\times 2-7+x+x-4\\ &= -3x-6-7+x+x-4\\ &= \mathbf{-x-17} \end{aligned}$$

2b. Factoriser

Pour factoriser une expression, on écrit ses termes sous forme de multiplication.
Il faut que **les multiplications comportent le même facteur** (le « facteur commun »).

Exemple Factoriser les expressions suivantes :

$A = 7x + 7y$	$B = 6x - 12$	$C = 4y^2 + 3y$
$D = 36 - 9x$	$E = 8x - 16 + 24y$	$F = 5y + 25$
$G = 4a + 4$	$H = -40x - 30$	$I = 6x + x^2$

$$\begin{aligned} A &= 7x + 7y \\ &= 7 \times x + 7 \times y \\ &= \mathbf{7(x + y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 6x - 12 \\ &= 6 \times x - 6 \times 2 \\ &= \mathbf{6(x - 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 4y^2 + 3y \\ &= y \times 4y + y \times 3 \\ &= \mathbf{y(4y + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 36 - 9x \\ &= 9 \times 4 - 9 \times x \\ &= \mathbf{9(4 - x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 8x - 16 + 24y \\ &= 8 \times x - 8 \times 2 + 8 \times 3y \\ &= \mathbf{8(x - 2 + 3y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 5y + 25 \\ &= 5 \times y + 5 \times 5 \\ &= \mathbf{5(y + 5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= 4a + 4 \\ &= 4 \times a + 4 \times 1 \\ &= \mathbf{4(a + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -40x - 30 \\ &= 10 \times (-4x) + 10 \times (-3) \\ &= \mathbf{10(-4x - 3)} \\ &\text{ou } \mathbf{-10(4x + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 6x + x^2 \\ &= x \times 6 + x \times x \\ &= \mathbf{x(6 + x)} \end{aligned}$$

3. Double distributivité

3a. Développement double

Propriété : Soient a, b, c et d quatre réels. Alors :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple 1 Développer, réduire et ordonner les expressions.

$A = (2+x)(3+5x)$ $\quad$ $B = (2x-5)(7-4x)$ $\quad$ $C = (y-2)(3-x)$

$D = 1 + 7x(3-x)$ $\quad$ $E = (x+1)(x^2-3x)$

Factoriser par une parenthèses : on peut factoriser par une somme/différence entre parenthèses. La parenthèse peut jouer le rôle de facteur commun.

Exemple 2 Factoriser $A = (x-2)(3x+8) + (x-5)(x-2)$ et $B = 5(x+1) - (2x-3)(x+1)$.

Exemple 1

$$\begin{aligned} A &= (2+x)(3+5x) \\ &= 2\times 3 + 2\times 5x + x\times 3 + x\times 5x \\ &= 6 + 10x + 3x + 5x^2 \\ &= \mathbf{5x^2 + 13x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2x-5x)(7-4x) \\ &= 2x\times 7 - 2x\times 4x - 5\times 7 + 5\times 4x \\ &= 14x - 8x^2 - 35 + 20x \\ &= \mathbf{-8x^2 + 34x - 35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (y-2)(3-x) \\ &= y\times 3 - yx - 2\times 3 + 2\times x \\ &= \mathbf{3y - xy - 6 + 2x} \end{aligned}$$

$D = 1 + 7x(3-x)$

Attention, ce n'est pas un développement double, seul le 7x multiplie la parenthèse. C'est un développement simple.

$$\begin{aligned} &= 1 + 7x\times 3 - 7x\times x \\ &= 1 + 21x - 7x^2 \\ &= \mathbf{-7x^2 + 21x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= (2x-1)(x^2+3) \\ &= 2x\times x^2 + 2x\times 3 - 1\times x^2 - 1\times 3 \\ &= \mathbf{2x^3 - x^2 + 6x - 3} \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} A &= (x-2)(3x+8) + (x-5)(x-2) \\ &= (x-2)\big((3x+8) + (x-5)\big) \\ &= \mathbf{(x-2)(4x-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 5(x+1) - (2x-3)(x+1) \\ &= (x+1)\big(5 - (2x-3)\big) \\ &= (x+1)(5 - 2x + 3) \\ &= \mathbf{(x+1)(-2x+8)} \end{aligned}$$

3b. Identités remarquables

Propriété : Soient a et b deux réels. Alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple Utiliser les identités remarquables pour développer et réduire.

$A = (x-7)^2$ $\quad B = (2x+3)^2$ $\quad C = (4x-9)(4x+9)$ $\quad D = (7x+1)(7x-1)$

$E = (3x-7)^2 + (10x-1)^2$ $\quad F = 2(x-9)^2$

$$\begin{aligned} A &= (x-7)^2 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 \\ &= \boldsymbol{x^2 - 14x + 49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2x+3)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= \boldsymbol{4x^2 + 12x + 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (4x-9)(4x+9) \\ &= (4x)^2 - 9^2 \\ &= \boldsymbol{16x^2 - 81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (7x+1)(7x-1) \\ &= (7x)^2 - 1^2 \\ &= \boldsymbol{49x^2 - 1} \end{aligned}$$

$E = (3x-7)^2 + (10x-1)^2$

$E = ((3x)^2 - 2 \times 3x \times 7 + 7^2) + ((10x)^2 - 2 \times 10x \times 1 + 1^2)$

$E = (9x^2 - 42x + 49) + (100x^2 - 20x + 1)$

La 2ème parenthèse est précédée d'un +, on la supprime sans changer les signes.

$E = 9x^2 - 42x + 49 + 100x^2 - 20x + 1$

$E = \boldsymbol{109x^2 - 62x + 50}$

*Ici, **le carré étant prioritaire sur la multiplication par 2**, on développe d'abord avec l'identité remarquable en laissant le résultat entre parenthèses.*
On ne distribue la multiplication par 2 qu'après.

$F = 2(x-9)^2$

$F = 2(x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2)$

$F = 2(x^2 - 18x + 81)$

$F = 2 \times x^2 - 2 \times 18x + 2 \times 81$

$F = \boldsymbol{2x^2 - 36x + 162}$

3c. Autres techniques

<u>Développement simple, puis double</u> : pour développer une expression de la forme $k(a+b)(c+d)$, il est souvent plus simple de distribuer d'abord k à la parenthèse $(a+b)$, en la laissant entre parenthèses.

Exemple 1 Développer : $A = 3(5+x)(2x-10)$ $\quad$ $B = -(x-3)(1-5x)$
$C = 4(1+x)(x-1{,}5)$ $\quad$ $D = -2(7-x)(x+5)$

<u>Montrer qu'une expression est égale à une autre</u> : pour montrer que deux expressions sont égales, le plus simple est de **développer celle qui est factorisée**, afin de retrouver l'autre expression.

Exemple 2 On considère l'expression $A(x) = -2x^2 + 6x + 8$. Montrer que $A(x) = (x+1)(8-2x)$.

Exemple 3 Soit A et B les expressions définies par $A(x) = 2x^2 + 10x + 900$ et $B(x) = 120x$.
On considère l'expression C définie par $C(x) = B(x) - A(x)$.
a. Montrer que $C(x) = -2x^2 + 110x - 900$.
b. Vérifier que $C(x) = -2(x-45)(x-10)$.

Les développements de ces exemples seront un peu moins détaillés. Par exemple, les développements simples, plus faciles, peuvent être faits de tête.

Exemple 1

On développe d'abord le 3 (de tête), puis on effectue le développement double.

$$\begin{aligned}A &= 3(4+x)(2x-10)\\ &= (12+3x)(2x-10)\\ &= 12\times 2x - 12\times 10 + 3x\times 2x - 3x\times 10\\ &= 24x - 120 + 6x^2 - 30x\\ &= \mathbf{6x^2 - 6x - 120}\end{aligned}$$

Lorsqu'un – est placé devant une parenthèse, on change le signe de son contenu.

$$\begin{aligned}B &= -(x-3)(1-5x)\\ &= (-x+3)(1-5x)\\ &= -x\times 1 + x\times 5x + 3\times 1 - 3\times 5x\\ &= -x + 5x^2 + 3 - 15x\\ &= \mathbf{5x^2 - 16x + 3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 4(1+x)(x-1{,}5)\\ &= (4+4x)(x-1{,}5)\\ &= 4\times x - 4\times 1{,}5 + 4x\times x - 4x\times 1{,}5\\ &= 4x - 6 + 4x^2 - 6x\\ &= \mathbf{4x^2 - 2x - 6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= -2(7-x)(x+5)\\ &= (-14+2x)(x+5)\\ &= -14\times x - 14\times 5 + 2x\times x + 2x\times 5\\ &= -14x - 70 + 2x^2 + 10x\\ &= \mathbf{2x^2 - 4x - 70}\end{aligned}$$

Exemple 2
On développe l'expression proposée.
$(x+1)(8-2x)$
$= x \times 8 - x \times 2x + 1 \times 8 - 1 \times 2x$
$= 8x - 2x^2 + 8 - 2x$
$= -2x^2 + 6x + 8$
On retrouve bien $A(x)$. Donc oui, $\boldsymbol{A(x) = (x+1)(8-2x)}$.

Exemple 3
a. D'après l'énoncé, $C(x) = B(x) - A(x)$. On calcule donc :
$C(x) = 120x - (2x^2 + 10x + 900)$
$C(x) = 120x - 2x^2 - 10x - 900$
$\boldsymbol{C(x) = -2x^2 + 110x - 900}$
On a bien trouvé ce que l'énoncé demandait.

b. *Essayons de développer l'expression proposée.*
$-2(x-45)(x-10)$
$= (-2x+90)(x-10)$
$= -2x \times x + 2x \times 10 + 90 \times x - 90 \times 10$
$= -2x^2 + 20x + 90x - 900$
$= -2x^2 + 110x - 900$
On retrouve bien l'expression précédente. Donc $\boldsymbol{C(x) = -2(x-45)(x-10)}$**.**