Chapitre 2 – Calcul littéral et équations

1. Calcul littéral

Définition : Une expression littérale est une suite de calculs où des nombres sont représentés par des lettres.

Exemples

1. Calculer pour $x = 5$:	$A = x + x^2$	$B = 2x^2$	$C = (2x)^2$
2. Calculer pour $y = -7$:	$D = 4 - y$	$E = y^2$	$F = y(9 + y)$
3. Calculer pour $z = 1{,}5$:	$G = 2z + 7$	$H = 7(z - 2)$	$I = -10z$

1. $A = 5 + 5^2 = 5 + 25 = \mathbf{30}$

$B = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = \mathbf{50}$ *Le carré est prioritaire sur la multiplication.*

$C = (2 \times 5)^2 = 10^2 = \mathbf{100}$

Ici, à cause des parenthèses, la multiplication redevient prioritaire.

2. *Quand on remplace une lettre par un nombre négatif, on met toujours ce nombre entre parenthèses pour éviter les erreurs.*

$D = 4 - (-7) = 4 + 7 = \mathbf{11}$

$E = (-7)^2 = (-7) \times (-7) = \mathbf{49}$ *Un carré est toujours positif.*

$F = -7\big(9 + (-7)\big) = -7 \times 2 = \mathbf{-14}$

On calcule d'abord la somme $9 + (-7)$ *entre parenthèses.*

3. $G = 2 \times 1{,}5 + 7 = 3 + 7 = \mathbf{10}$

$H = 7(1{,}5 - 2) = 7 \times (-0{,}5) = \mathbf{-3,5}$

$I = -10 \times 1{,}5 = \mathbf{-15}$

2. Développer et factoriser

Propriété : soient k, a et b trois réels. Alors :

$$k(a+b) = ka + kb \text{ et } k(a-b) = ka - kb$$

La distributivité sert :
- à transformer un produit en somme (développer)
- ou à transformer une somme en produit (factoriser)

Exemple 1 Développer les expressions suivantes :

$A = 5(x+7)$ $\quad B = (3-y)\times 7$ $\quad C = 11(2+3x)$ $\quad D = x(2y-10)$

$E = 2x(x+11)$ $\quad F = -5x(9+x)$ $\quad G = -4(3-a)$ $\quad H = -x(-x^2+5x+1)$

Exemple 2 Factoriser les expressions suivantes :

$A = 7x + 7y$ $\quad B = 6x - 12$ $\quad C = 4y^2 + 3y$

$D = 36 - 9x$ $\quad E = 8x - 16 + 24y$ $\quad F = 5y + 25$

$G = 4a + 4$ $\quad H = -40x - 30$ $\quad I = 6x + x^2$

Exemple 1

$A = 5(x+7)$
$= 5\times x + 5\times 7$
$= \mathbf{5x + 35}$

$B = (3-y)\times 7$
$= 7\times 3 - 7\times y$
$= \mathbf{21 - 7y}$

$C = 11(2+3x)$
$= 11\times 2 + 11\times 3x$
$= \mathbf{22 + 33x}$

$D = x(2y-10)$
$= x\times 2y - x\times 10$
$= \mathbf{2xy - 10x}$

$E = 2x(x+11)$
$= 2x\times x + 2x\times 11$
$= \mathbf{2x^2 + 22x}$

$F = -5x(9+x)$
$= -5x\times 9 + (-5x)\times x$
$= \mathbf{-45x - 5x^2}$

$G = -4(3-a)$
$= -4\times 3 - (-4)\times a$
$= \mathbf{-12 + 4a}$

$H = -x(-x^2+5x+1)$
$= -x\times(-x^2) + (-x)\times 5x + (-x)\times 1$
$= \mathbf{x^3 - 5x^2 - x}$

Exemple 2

$A = 7x + 7y$
$= 7\times x + 7\times y$
$= \mathbf{7(x+y)}$

$B = 6x - 12$
$= 6\times x - 6\times 2$
$= \mathbf{6(x-2)}$

$C = 4y^2 + 3y$
$= y\times 4y + y\times 3$
$= \mathbf{y(4y+3)}$

$D = 36 - 9x$
$= 9\times 4 - 9\times x$
$= \mathbf{9(4-x)}$

$E = 8x - 16 + 24y$
$= 8\times x - 8\times 2 + 8\times 3y$
$= \mathbf{8(x - 2 + 3y)}$

$F = 5y + 25$
$= 5\times y + 5\times 5$
$= \mathbf{5(y+5)}$

$G = 4a + 4$
$= 4\times a + 4\times 1$
$= \mathbf{4(a+1)}$

$H = -40x - 30$
$= 10\times(-4x) + 10\times(-3)$
$= \mathbf{10(-4x-3)}$
ou $\mathbf{-10(4x+3)}$

$I = 6x + x^2$
$= x\times 6 + x\times x$
$= \mathbf{x(6+x)}$

3. Double distributivité

3a. Rappel des formules

Propriétés : Soient a, b, c et d quatre réels. Alors :

- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple 1 Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (x+9)(3-2x)$ $B = (y-2)(3-x)$ $C = (2x-1)(x^2+3)$

Exemple 2 Même consigne, avec des identités remarquables.

$A = (x-7)^2$ $B = (2x+3)^2$ $C = (4x-9)(4x+9)$ $D = (7x-1)^2$

Exemple 1

$$\begin{aligned} A &= (x+9)(3-2x) \\ &= x \times 3 + x \times (-2x) + 9 \times 3 + 9 \times (-2x) \\ &= 3x - 2x^2 + 27 - 18x \\ &= \mathbf{-2x^2 - 15x + 27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (y-2)(3-x) \\ &= y \times 3 + y \times (-x) + (-2) \times 3 + (-2) \times (-x) \\ &= \mathbf{3y - xy - 6 + 2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2x-1)(x^2+3) \\ &= 2x \times x^2 + 2x \times 3 + (-1) \times x^2 + (-1) \times 3 \\ &= \mathbf{2x^3 - x^2 + 6x - 3} \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} A &= (x-7)^2 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 \\ &= \mathbf{x^2 - 14x + 49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2x+3)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= \mathbf{4x^2 + 12x + 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (4x-9)(4x+9) \\ &= (4x)^2 - 9^2 \\ &= \mathbf{16x^2 - 81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (7x-1)^2 \\ &= (7x)^2 - 2 \times 7x \times 1 + 1^2 \\ &= \mathbf{49x^2 - 14x + 1} \end{aligned}$$

3b. Autres usages

Développement simple, puis double : pour développer une expression de la forme $k(a+b)(c+d)$, il est souvent plus simple de distribuer d'abord k à la parenthèse $(a+b)$, en la laissant entre parenthèses.

Exemple 1 Développer $A = 3(5+x)(2x-10)$ et $B = -(x-3)(1-5x)$.

Factoriser par une parenthèses : on peut factoriser par une somme/différence entre parenthèses.
La parenthèse peut jouer le rôle de facteur commun.

Exemple 2 Factoriser $A = (x-2)(3x+8) + (x-5)(x-2)$ et $B = 5(x+1) - (2x-3)(x+1)$.

Montrer qu'une expression est égale à une autre : pour montrer que deux expressions sont égales, le plus simple est de développer celle qui est factorisée, afin de retrouver l'autre expression.

Exemple 3 On considère l'expression $A(x) = -2x^2 + 6x + 8$. Montrer que $A(x) = (x+1)(8-2x)$.

Exemple 4 Soit A et B les expressions définies par $A(x) = 2x^2 + 10x + 900$ et $B(x) = 120x$.
On considère l'expression C définie par $C(x) = B(x) - A(x)$.
a. Montrer que $C(x) = -2x^2 + 110x - 900$. **b.** Vérifier que $C(x) = -2(x-45)(x-10)$.

Les développements de ces exemples seront un peu moins détaillés. Par exemple, les développements simples, plus faciles, peuvent être faits de tête.

Exemple 1

On développe d'abord le 3 (de tête), puis on effectue le développement double.

$$\begin{aligned} A &= 3(4+x)(2x-10) \\ &= (12+3x)(2x-10) \\ &= 12 \times 2x - 12 \times 10 + 3x \times 2x - 3x \times 10 \\ &= 24x - 120 + 6x^2 - 30x \\ &= \mathbf{6x^2 - 6x - 120} \end{aligned}$$

Lorsqu'un – est placé devant une parenthèse, on change le signe de son contenu.

$$\begin{aligned} B &= -(x-3)(1-5x) \\ &= (-x+3)(1-5x) \\ &= -x \times 1 + x \times 5x + 3 \times 1 - 3 \times 5x \\ &= -x + 5x^2 + 3 - 15x \\ &= \mathbf{5x^2 - 16x + 3} \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} A &= (x-2)(3x+8) + (x-5)(x-2) \\ &= (x-2)\big((3x+8) + (x-5)\big) \\ &= \mathbf{(x-2)(4x-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 5(x+1) - (2x-3)(x+1) \\ &= (x+1)\big(5 - (2x-3)\big) \\ &= (x+1)(5 - 2x + 3) \\ &= \mathbf{(x+1)(-2x+8)} \end{aligned}$$

Exemple 3 On développe l'expression proposée.
$(x+1)(8-2x)$
$= x \times 8 - x \times 2x + 1 \times 8 - 1 \times 2x$
$= 8x - 2x^2 + 8 - 2x$
$= -2x^2 + 6x + 8$
On retrouve bien $A(x)$. Donc oui, $\boldsymbol{A(x) = (x+1)(8-2x)}$.

Exemple 4
a. D'après l'énoncé, $C(x) = B(x) - A(x)$. On calcule donc :
$C(x) = 120x - (2x^2 + 10x + 900)$
$C(x) = 120x - 2x^2 - 10x - 900$
$\boldsymbol{C(x) = -2x^2 + 110x - 900}$
On a bien trouvé ce que l'énoncé demandait.
b. Essayons de développer l'expression proposée.
$-2(x-45)(x-10)$
$= (-2x+90)(x-10)$
$= -2x \times x + 2x \times 10 + 90 \times x - 90 \times 10$
$= -2x^2 + 20x + 90x - 900$
$= -2x^2 + 110x - 900$
On retrouve bien l'expression précédente. Donc $\boldsymbol{C(x) = -2(x-45)(x-10)}$**.**

4. Équations

4a. Équations linéaires

Définition : Une équation est une égalité comportant un nombre inconnu, souvent noté x.

Pour résoudre une équation, le but est d'abord de placer tous les termes en x dans un membre (souvent à gauche), et tous les autres termes dans l'autre membre (souvent à droite).

Exemple Donner l'ensemble solution de ces équations.

a. $2x+5=11$ **b.** $1-3x=29+x$ **c.** $13+6x=4+7x$ **d.** $4(x+5)-7x=10x+3$

a. $2x+5=11$
$\Leftrightarrow 2x=11-5$
$\Leftrightarrow 2x=6$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{6}{2}$
$\Leftrightarrow x=3$ donc $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{3}\}$.

b. $1-3x=29+x$
$\Leftrightarrow -3x-x=29+1$
$\Leftrightarrow -4x=30$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{30}{-4}$
$\Leftrightarrow x=7{,}5$ donc $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{7,5}\}$.

c. $13+6x=4+7x$
$\Leftrightarrow 6x-7x=4-13$
$\Leftrightarrow -x=-9$
$\Leftrightarrow x=9$ donc $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{9}\}$

d. $4(x+5)-7x=10x+3$
$\Leftrightarrow 4x+20-7x=10x+3$
$\Leftrightarrow 4x-7x-10x=3-20$
$\Leftrightarrow -13x=-17$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{-17}{-13}$ donc $\boldsymbol{S}=\left\{\dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}}\right\}$

4b. Équations particulières

Équations de type $x^2 = a$: si a est positif, ces équations ont deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Sinon, elles n'ont pas de solution.

Exemple 1 **a.** $2x^2 - 72 = 0$ **b.** $3x^2 - 15 = 0$ **c.** $x^2 + 7 = 0$

Équations produit nul : un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
On sépare alors l'équation produit en plusieurs petites équations.
Attention : on ne peut faire cela que lorsque le membre de gauche est un produit, et l'autre membre est nul.

Exemple 2 **a.** $(x+7)(5x-3) = 0$ **b.** $-2(1-x)(3x+4) = 0$

Équations quotient : il faut d'abord vérifier quelles sont les valeurs interdites : ce sont celles qui annulent le dénominateur. Ensuite, on peut par exemple effectuer un produit en croix.

Exemple 3 **a.** $\frac{x-10}{2x+6} = 4$ **b.** $\frac{8+x}{3x+1} = \frac{2x-7}{6x}$

Exemple 1

a. $2x^2 - 72 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 = 72$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{72}{2}$
$\Leftrightarrow x^2 = 36$
donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{6}; -\mathbf{6}\}$

b. $3x^2 - 15 = 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 = 15$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{15}{3}$
$\Leftrightarrow x^2 = 5$
donc $\boldsymbol{S} = \{\sqrt{\mathbf{5}}; -\sqrt{\mathbf{5}}\}$

c. $x^2 + 7 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = -7$
Un carré ne peut pas être négatif. L'équation n'a pas de solution (on note $\boldsymbol{S} = \emptyset$).

Exemple 2

a. $(x+7)(5x-3) = 0$
soit $x + 7 = 0$ soit $5x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -7$ $\Leftrightarrow 5x = 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$
donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\mathbf{7}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right\}$

b. $-2(1-x)(3x+4) = 0$
soit $1 - x = 0$ soit $3x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow -x = -1$ $\Leftrightarrow 3x = -4$
$\Leftrightarrow x = 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}$
donc $\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{1}; -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right\}$

Exemple 3

a. La valeur interdite vérifie $2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$. Ensuite :
$$\frac{x-10}{2x+6} = 4 \Leftrightarrow x - 10 = 4(2x+6) \Leftrightarrow x - 10 = 8x + 24 \Leftrightarrow -7x = 34 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{7}}$$
b. Il y a deux valeurs interdites : $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$
ainsi que $6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ensuite :
$$\frac{8+x}{3x+1} = \frac{2x-7}{6x} \Leftrightarrow 6x(8+x) = (3x+1)(2x+7)$$
$$\Leftrightarrow 48x + 6x^2 = 6x^2 + 21x + 2x + 7 \Leftrightarrow 48x - 21x - 2x = 7 \Leftrightarrow 25x = 7 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{25}}$$

5. Inéquations

Définition : Une inéquation est une inégalité comportant un nombre inconnu.

On suit exactement la méthode que pour les équations, <u>MAIS</u> si on doit changer le signe des deux membres ou multiplier/diviser par un nombre négatif, alors <u>le sens de l'inégalité change</u>.

Exemple Résoudre les inéquations suivantes, représenter l'ensemble solution par un intervalle.

a. $x + 2 < 3$ **b.** $-9x \geq 45$ **c.** $-4x + 7 \leq -3x - 3$ **d.** $7(x + 5) > 3(x - 4)$

a. $x + 2 < 3$
$\Leftrightarrow x < 3 - 2$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x < 1}$
Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 1 :
$\boldsymbol{S} =]-\infty; \mathbf{1}[$

b. $-9x \geq 45$
$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{45}{-9}$
$\Leftrightarrow x \leq -5$
Les solutions sont les nombres inférieurs ou égaux à 5 : $\boldsymbol{S} =]-\infty; \mathbf{5}]$

c. $-4x + 7 \leq -3x - 3$
$\Leftrightarrow -4x + 3x \leq -3 - 7$
$\Leftrightarrow -x \leq -10$
$\Leftrightarrow x \geq 10$
Les solutions sont les nombres supérieurs ou égaux à 10 :
$\boldsymbol{S} = [\mathbf{10}; +\infty[$

d. $7(x + 5) > 3(x - 4)$
$\Leftrightarrow 7x + 35 > 3x - 12$
$\Leftrightarrow 7x - 3x > -12 - 35$
$\Leftrightarrow 4x > -47$
$\Leftrightarrow x > -\dfrac{47}{4}$
Les solutions sont les nombres strictement supérieurs à $-\frac{47}{4}$:
$\boldsymbol{S} =]-\dfrac{\mathbf{47}}{\mathbf{4}}; +\infty[$

6. Tableaux de signe

Définition : Un tableau de signes permet de dire pour quelles valeurs de x une expression est positive ou négative.

Propriété : Soient a et b deux nombres, a non nul.
L'expression $ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ et son signe est :

- si $a > 0$: d'abord négatif, puis positif
- si $a < 0$: d'abord positif, puis négatif

Exemple 1 Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

a. $A(x) = 3x - 4{,}5$ **b.** $B(x) = -5x + 7$ **c.** $C(x) = -9 - 4x$

<u>Produits et quotients</u> : pour dresser leurs tableau de signe, on rajoute une ligne par facteur, et on en déduit le signe du produit/quotient à l'aide de la règle des signes.
Penser à ajouter une double barre pour les valeurs interdites (les « 0 » du dénominateur).

Exemple 2 Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

a. $A(x) = (2x - 9)(-10x + 7)$ **b.** $B(x) = \frac{7x+1}{8-2x}$

Exemple 1

a. $3x - 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4{,}5 \Leftrightarrow x = \dfrac{4{,}5}{3} \Leftrightarrow x = 1{,}5$

Le nombre qui multiplie x (3) est positif, donc l'expression est d'abord négative, puis positive. *Le signe de ce nombre est toujours à droite du zéro.*

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
$3x-4,5$		$-$	0	$+$	

b. $-5x + 7 = 0 \Leftrightarrow -5x = -7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7}{-5} \Leftrightarrow x = 1{,}4$

Le nombre qui multiplie x (-5) est négatif, donc l'expression est d'abord positive, puis négative.

x	$-\infty$		$1,4$		$+\infty$
$-5x+7$		$+$	0	$-$	

c. $-9-4x=0 \Leftrightarrow -4x=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{-4} \Leftrightarrow x=-2{,}25$

Le nombre qui multiplie x (-4) est négatif, donc l'expression est d'abord positive, puis négative.

x	$-\infty$		$-2,25$		$+\infty$
$-9x-4$		$+$	0	$-$	

Exemple 2

a. $2x-9=0 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x=4{,}5$

et $-10x+7=0 \Leftrightarrow -10x=-7 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{-10} \Leftrightarrow x=0{,}7$

On dresse le tableau en faisant attention, à chaque fois, au signe du nombre qui multiplie x.

x	$-\infty$		$0,7$		$4,5$		$+\infty$
$2x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$-10x+7$		$+$	0	$-$		$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $7x+1=0 \Leftrightarrow 7x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{7}$

et $8-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-8 \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{-2} \Leftrightarrow x=4$

On placera donc une double barre en face du 4.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		4		$+\infty$
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$8-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	