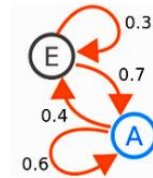
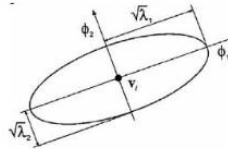
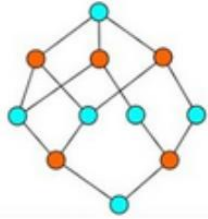


Chapitre 2 – Matrices : définitions et opérations

Les **matrices** sont des tableaux de nombres.

Cela peut sembler tout à fait quelconque, mais il s'avère que munies de certaines propriétés (somme, produit) que nous verrons dans ce cours, les matrices ont de nombreuses utilités : résolution de **systèmes d'équation**, théorie des **graphes**, géométrie, probabilités avec les **chaînes de Markov**...

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$$



Historiquement, l'utilisation de tableaux de nombres pour résoudre des problèmes tels que des systèmes d'équations **date de l'Antiquité**. En 1750, Gabriel **Cramer** énonce la règle qui permet de résoudre n'importe quel système d'équation linéaire ayant une solution, grâce à ce concept.

Le mot « matrix », de racine latine « mater », francisé en « matrice », date lui de 1850, et c'est en 1854 qu'Arthur **Cayley** publie le premier traité qui formalise la notion.



1. Définitions

1a. Matrices

Définition : une matrice A de dimension $n \times p$ est un **tableau de nombres réels** à n lignes et p colonnes, appelés **coefficients**.

On note $A = (a_{ij})$, où a_{ij} est le coefficient de la i^{e} ligne et j^{e} colonne.

L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Compléter : $m_{23} =$ $m_{31} =$ $m_{13} =$ $m_{33} =$

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a. À quel ensemble appartient A ?
b. Donner a_{21} et a_{23} . Que dire de a_{32} ?

Définition (Matrices égales) : deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même dimension $n \times p$ sont dites égales, si et seulement si pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ et tout $j \in \{1 ; 2 ; \dots ; p\}$, $a_{ij} = b_{ij}$

Exemple 3 Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 3-y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 3x+4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de x, y et z a-t-on $A = B$?

Exemple 4 Soit $C = (c_{ij})$ à trois lignes et trois colonnes telle que $c_{ij} = i - 2j$. Représenter C .

Exemple 5 Soit $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ telle que $d_{ij} = \begin{cases} 3i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Représenter D . Que remarque-t-on ?

Exemple 1 $m_{23} = 7$; $m_{31} = 0$; $m_{13} = 5$ et $m_{33} = 9$.

Exemple 2

a. A est une matrice à 2 lignes et 4 colonnes. Donc $A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.

b. $a_{21} = -1$ et $a_{23} = 0$. a_{32} **n'existe pas**, car il n'y a pas de 3^{ème} ligne.

Exemple 3

On a $A = B$ si et seulement si :

$$-5 = 3x + 4 \Leftrightarrow x = 3; \quad 3 - y = 7 \Leftrightarrow y = -4 \quad \text{et } z = 4.$$

Exemple 4

On calcule par exemple pour $c_{11} = 1 - 2 \times 1 = -1$: pour $c_{12} = 1 - 2 \times 2 = -3$.

On continue ainsi pour obtenir $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exemple 5

La définition de D implique que si l'indice de la ligne est différent de l'indice de la colonne, alors le coefficient est nul.

On trouve donc $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

On remarque que seuls les coefficients sur la diagonale sont non-nuls. Plus tard, on appellera cela une **matrice diagonale**.

1b. Transposée

Définition (Transposée) : soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$.

La **matrice transposée** de A est la matrice de dimension $p \times n$, notée A^t , telle que $A^t = (a_{ji})$

Les lignes de A correspondent aux colonnes de A^t . (On note parfois tA)

Exemple 1 Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $A^t =$

Exemple 2 Soit $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = j - i^2$. Représenter B et B^t .

Exemple 1 $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple 2 On a par exemple $b_{11} = 1 - 1^2 = 0$, $b_{21} = 1 - 2^2 = -3$...

Ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Notez que, comme les coefficients (b_{ij}) de B vérifient la relation $b_{ij} = j - i^2$, les coefficients (c_{ij}) de B^t vérifient, eux, la relation $c_{ij} = i - j^2$.

1c. Matrices particulières

Définitions (Matrices particulières) :

- Une matrice de dimension $1 \times p$ est appelée une **matrice ligne**.

Exemple : $M = (2 \ 0 \ 3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne.

- Une matrice de dimension $n \times 1$ est appelée une **matrice colonne**.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne.

Les matrices lignes et colonnes sont souvent assimilées aux **vecteurs**.

- Une matrice de dimension $n \times n$ est appelée une **matrice carrée** d'ordre n .

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice carrée.

- Dans une matrice carrée $A = (a_{ij})$, $\{a_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$ est l'ensemble des coefficients de la **diagonale principale** de A . Si tous les autres coefficients sont nuls, on parle de **matrice diagonale** d'ordre n .

2. Opérations

2a. Somme et produit par un réel

Définition : soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

On définit kA , le **produit de la matrice A par le réel k** , par $kA = (ka_{ij})$

Exemple 1 Pour $A = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $3A =$ et $-\frac{2}{3}A =$

Définition : soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices **de même dimension $n \times p$** .

Alors $A + B$ est la **matrice somme** $(a_{ij} + b_{ij})$.

Exemple 2 On donne $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \\ 0,5 & -1,5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -3 \\ -8 & -0,5 \end{pmatrix}$. Calculer $M + N$ et $M - N$.

Exemple 1 $3A = \begin{pmatrix} 36 & -9 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}$ et $-\frac{2}{3}A = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

Exemple 2 $M + N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 11 & -5 \\ -7,5 & -2 \end{pmatrix}$ et $M - N = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 1 \\ 8,5 & -1 \end{pmatrix}$.

2b. Combinaisons linéaires

Définition Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et A, B deux matrices. La matrice $\alpha A + \beta B$ est une **combinaison linéaire** de A et de B .

Exemple 1 Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A + 3B$ et $\frac{1}{2}A - 5B$.

Définition On note $0_{n,p}$ (ou parfois juste **0**) la matrice nulle de dimension $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls. Par exemple, $0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$. Déterminer le coefficient x tel que $xA + B = 0$.

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices de dimension $n \times p$, et soit k un nombre réel.

- L'addition est **commutative** : $A + B = B + A$ • L'addition est **associative** : $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Le produit par un réel est **distributif par rapport à l'addition** : $k(A + B) = kA + kB$
- $0_{n,p}$ est l'**élément neutre** de l'addition : $A + 0_{n,p} = A$
- $kA = 0_{n,p}$ si et seulement si $k = 0$ ou $A = 0_{n,p}$

Exemple 1 $A + 3B = \begin{pmatrix} -8 & 16 & 24 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 & 18 \\ 0 & 3 & 27 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 31 & 42 \\ 0 & 7 & 27 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}A - 5B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -25 & -30 \\ 0 & -5 & -45 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -21 & -24 \\ 0 & -4 & -45 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 2 Soit x réel. $xA + B = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 3 & 0 \\ 4x - 6 & -10x + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Or $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$, de même que $4x - 6 = 0$ et $-10x + 15 = 0$. Donc $x = 1,5$.

3. Produit et puissances

3a. Produit

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

Si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (autrement dit, $m = p$), alors on définit le produit matriciel AB par :

$$AB = (p_{ij}) \text{ où pour tout } i \in \{1; \dots; n\} \text{ et } j \in \{1; \dots; q\}, p_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

Exemple 1 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; $C = (2 \ 3 \ -1)$ et $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Calculer, lorsque cela est possible, les produits AB ; BC ; AD ; CD et DC .

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices, et soit k un nombre réel.

Les propriétés sont valables sous réserve que les calculs soient possibles.

- La multiplication est **associative** : $A(BC) = (AB)C$
- La multiplication est **distributive par rapport à l'addition** : $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- $0_{n,p}$ est l'**élément absorbant** de la multiplication : $0_{n,p}A = A0_{n,p} = 0_{n,p}$

Remarque : Même lorsqu'il donne deux matrices de même dimension, le produit de matrices n'est **pas commutatif** : en général, AB est différent de BA .

Exemple 2 soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA .

Remarque : Deux matrices peuvent avoir un **produit nul sans être elles-mêmes nulles**.

Exemple 3

a. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer MN . b. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer PP et PPP .

Exemple 1

• A possède 3 colonnes et B possède 3 lignes, donc le produit AB est possible. Ce produit possède 2 lignes (comme A) et 2 colonnes (comme B).

En pratique, pour effectuer un produit de matrices, on n'applique pas directement la formule de la définition. On dispose d'abord les deux matrices comme ceci :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Puis, pour calculer chaque coefficient du produit, on multiplie chaque coefficient de A aligné avec le coefficient qu'on veut calculer, par le coefficient de B sur la colonne correspondante.

Par exemple, pour le coefficient en haut à gauche, on calcule :

$$2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times (-2) = 16$$

On refait cette opération pour chacun des 4 coefficients du produit. Généralement, on n'écrit pas toutes ces multiplications : on s'entraîne à les effectuer de tête.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times (-2) & 2 \times 0 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-3) \\ 1 \times 1 + (-5) \times 4 + 0 \times (-2) & 1 \times 0 + (-5) \times (-1) + 0 \times (-3) \end{pmatrix}$$

Ainsi, $AB = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix}$

• B possède 2 colonnes et C possède 1 ligne, donc le produit BC est **impossible**.
D'ailleurs, si on place les matrices B et C comme précédemment, on voit que cela ne fonctionne pas :

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad ???$$

En effet, on ne dispose pas de la même quantité de nombres à multiplier pour trouver un coefficient du produit : on a 2 nombres de B à multiplier avec 1 seul nombre de C.

• A possède 3 colonnes et D possède 3 lignes, donc le produit AD est possible.
Ce produit possède 2 lignes (comme A) et 1 colonne (comme D).

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• C possède 3 colonnes et D possède 3 lignes, donc le produit CD est possible.
Ce produit possède 1 ligne (comme A) et 1 colonne (comme D).

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

Tiens, on a fait le même calcul que pour AD. C'est normal : la 1^{ère} ligne de A est identique à l'unique ligne de C.

• D possède 1 colonne et C possède 1 ligne, donc le produit DC est possible.
Ce produit possède 3 lignes (comme D) et 3 colonnes (comme C).

$$DC = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 25 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

a. $MN = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{2,2}$

b. $PP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $PPP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3,3}$

3b. Matrice identité et puissances

Définition : On note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou parfois I tout court) la **matrice identité de dimension n** , avec des 1 sur sa diagonale et des 0 partout ailleurs.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété : La matrice I_n est **l'élément neutre de la multiplication** : pour toute matrice A tel que le produit est possible, $AI_n = A$ et $I_nA = A$.

Définition : Pour $p \in \mathbb{N}$, si A est une matrice carrée de dimension n , $A^p = \underbrace{AAA \dots A}_{p \text{ facteurs}}$ et $A^0 = I_n$

Exemple 1 On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 .

Exemple 2 Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = 4M$. En déduire M^3 .

Exemple 3 Soit $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = -M$. En déduire M^7 .

Exemple 1

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 65 & 63 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -20 & 20 \end{pmatrix} = 4M$$

$$\text{Ainsi, } M^3 = M^2M = (4M)M = 4M^2 = 4 \times 4M = 16M = \begin{pmatrix} -16 & 16 \\ -80 & 80 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$$M^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -M.$$

Donc $M^7 = M^2M^2M^2M = (-M)(-M)(-M)M = -M^2M^2 = -(-M)(-M) = -M^2 = -(-M) = M$. En fait, $M^n = M$ si n est impair, et $-M$ sinon.

4. Inverse

4a. Matrice inversible

Définition : Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible**, s'il existe une matrice carrée notée $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Dans ce cas, cette matrice A^{-1} est unique. C'est **l'inverse de A** .

Exemple Dans chaque cas, vérifier que la matrice M a pour inverse la matrice N .

a. $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}$. b. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a. $MN = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$

Donc N est bien l'inverse de M : $N = M^{-1}$.

b. *Pour se faciliter la vie, calculons le produit sans la fraction $\frac{1}{10}$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10I_3$$

On en déduit que $MN = \frac{1}{10} \times 10I_3 = I_3$.

Ainsi, N est bien l'inverse de M .

4b. Déterminant

Définition : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le déterminant de A , noté $\det(A)$, est le nombre $\det(A) = ad - bc$

Propriété : A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

On a alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exemple Pour chaque matrice, déterminer si elle est inversible, et si oui, déterminer sa matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On montre plus tard qu'une matrice n'est pas inversible si et seulement si on peut exprimer une ligne (respectivement une colonne) comme combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes). Dans le cas des matrices carrées de dimension 2, cela signifie qu'une matrice n'est **pas inversible si et seulement si les deux lignes/colonnes sont colinéaires**.

- $\det(A) = 2 \times 5 - 3 \times (-1) = 13$. Ainsi, **A est inversible** et :

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

- $\det(B) = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 0$. Donc **B n'est pas inversible**.
- $\det(C) = 3 \times (-8) - (-7) \times 2 = -10$. Ainsi, **C est inversible** et :

$$C^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ -0,7 & -0,3 \end{pmatrix}$$

Attention, le signe du déterminant est important.

4c. Autres techniques

Exemple 1 A l'aide de la calculatrice, déterminer si les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ sont inversibles et le cas échéant, préciser leur inverse.

Exemple 2 Soit $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Montrer que B est sa propre inverse. En déduire B^9 .

Exemple 3 On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer les réels x et y tels que $C^2 = xC + yI_3$.
- b. En déduire que C est inversible et déterminer son inverse.

Exemple 4 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a. Effectuer les produits AB et AC à la calculatrice.
- b. En déduire que A n'est pas inversible.

Exemple 1 M est inversible et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -2 & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

En revanche, N n'est pas inversible.

Exemple 2

On remarque (éventuellement à la calculatrice) que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Donc $B^{-1} = B$. Ainsi, $B^9 = B^2 B^2 B^2 B^2 B = I_3 B = B$.

Exemple 3

a. On calcule $C^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, or $xC + yI = \begin{pmatrix} y & x & -x \\ -3x & 4x + y & -3x \\ -x & x & y \end{pmatrix}$

La seule possibilité est que $x = 3$ et $y = -2$. Ainsi, $C^2 = 3C - 2I$.

b. On essaie alors de réécrire cette égalité en laissant I dans le membre de droite, et en factorisant le membre de gauche par C .

Ainsi, C multipliée par une autre matrice sera égale à I , ce qui prouvera que C est inversible.

$$C^2 = 3C - 2I$$

$$\Leftrightarrow C^2 - 3C = -2I$$

Attention : en factorisant par C , on ne peut pas écrire « $C(C - 3)$ ». En effet, C est une matrice mais 3 est un nombre, et on ne peut pas soustraire une matrice est un nombre. En revanche, on peut écrire « $C(C - 3I)$ ».

$$\Leftrightarrow C(C - 3I) = -2I$$

$$C\left(-\frac{1}{2}(C - 3I)\right) = I$$

et C est inversible avec $C^{-1} = -\frac{1}{2}(C - 3I)$

Exemple 4

a. On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Ainsi, $AB = AC$.

b. Raisonnons alors par l'absurde : si A était inversible, il existerait une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$. On a alors :

$$AB = AC$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \text{ en multipliant par } A^{-1} \text{ à gauche dans les deux membres}$$

$$\Leftrightarrow B = C$$

Or B n'est pas égale à C . C'est une contradiction, donc **A n'est pas inversible.**

D'une façon générale, on a montré en question a que A était un « diviseur de zéro » : une matrice non-nulle qui, multipliée par une autre matrice non-nulle (ici $B - C$), donne une matrice nulle. Ces matrices ne peuvent jamais être inversibles.