Correction de l'interrogation écrite sur les matrices. Calculatrice interdite.

Exercice 1 (1,5 pt) **a.** *(0,5 pt)* $a_{2\,3} = 13$ **b.** *(1 pt)* $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 13 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (1 pt) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(0,5 pt si erreur mineure)*

Exercice 3 (1,5 pts) *(0,5 pt)* $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

(1 pt) $2A + 3B = \begin{pmatrix} 4+0 & 0+27 \\ -2+3 & 10-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 27 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (3 pts, 1,5 pts par produit)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times(-1)+1\times 0 & 0\times(-5)+1\times 4 \\ -4\times(-1)+(-2)\times 0 & -4\times(-5)+(-2)\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1)+1\times 0+5\times 3 \\ 4\times(-1)+(-2)\times 0+0\times 3 \\ 1\times(-1)+0\times 0+0\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (3 pts) $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$ *(0,5 pt)*

$CB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 3 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(1,5 pt)*

AB n'existe pas car le nombre de colonnes de A est 1 alors que le nombre de lignes de B est 3. *(0,5 pt)*
A^2 n'existe pas car A n'est pas une matrice carrée. *(0,5 pt)*

Exercice 6 (3 pts) *(1 pt)* $\det(B) = 6\times(-15) - 10\times(-9) = -90 + 90 = 0$, donc B n'est pas inversible.

(2 pts) $\det(A) = 3\times 2 - 1\times(-2) = 8$, donc A est inversible. On a $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

Exercice 7 (3 pts)

(2 pts) **a.** On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et on vérifie que cela correspond bien à $2I_3 - A$.

(1 pt) **c.** Ainsi, $A^2 + A = 2I_3$ soit $A(A+I) = 2I$ et $A(\frac{1}{2}(A+I)) = I$
donc l'inverse de A est $\frac{1}{2}(A+I)$.

Exercice 8 (2 pts) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8I_3$ *(1 pt)*

Ainsi, $J^7 = JJ^3J^3 = J\times 8I\times 8I = 64J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 128 \\ 128 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \end{pmatrix}$. *(1 pt)*

Exercice 9 (2 pts)

Si par hypothèse de récurrence, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & na+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui montre l'hérédité.