**Exercices : produits de matrices**

**Exercice 1** On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$ et $AC$.

**Exercice 2** Déterminer si les calculs suivants sont possibles, et le cas échéant, donner le résultat.

**a.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

**Exercice 3** Trouver les coefficients manquants.

**1.** $\begin{pmatrix} -1 & \ldots & 7 \\ \ldots & 5 & -2 \\ 4 & -6 & \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ldots & 2 & 5 \\ -5 & 3 & \ldots \\ -7 & \ldots & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 12 \\ -10 & 8 & 12 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -2 & \ldots & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ \ldots \\ 20 \end{pmatrix}$

**Exercice 4** On considère les matrices suivantes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer quels sont les produits possibles parmi ces matrices (y compris en les multipliant par elles-mêmes). *On ne demande pas d'effectuer les produits.*

**Exercice 5** **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$ non nul. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**2.** Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$, où $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercices : puissances de matrices**

**Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$ ; $A^3$ ; $B^2$ et $B^5$.

**Exercice 2** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2$ ; $A^3$ ; $B^2$ et $B^3$. Que remarque-t-on ? Que peut-on en déduire pour les puissances de ces deux matrices ?

**Exercice 3** Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer $M^2$ ; $M^3$ et $M^4$.

**2.** Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, une expression de $M^n$. Démontrer cette conjecture par récurrence.

**Exercice 4** Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que **a.** $A^2 = A$ **b.** $A^2 = I_2$.

charly-piva.fr