Correction de l'exercice sur l'inverse de matrice 2×2

• On calcule $\det(A) = 5 \times 1 - 2 \times (-3) = 11 \neq 0$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \mathbf{\frac{1}{11}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$.

• $\det(B) = 4 \times 3 - (-6) \times (-2) = 0$, donc B n'est **pas inversible**.

• $\det(C) = -1 \times (-2) - 3 \times (-2) = 8 \neq 0$, donc $C^{-1} = \mathbf{\frac{1}{8}}\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

• $\det(D) = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$, donc $D^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Correction des exercices sur les inverses exprimés en fonction d'une matrice 3×3

Exercice 1 On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, donc $A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$.

On factorise l'égalité obtenue par A. $A^2 + A = 2I \Leftrightarrow (A + I)A = 2I \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A + I)A = I$

Ainsi, A est inversible et son inverse est $\mathbf{\frac{1}{2}(A + I)}$. On peut calculer : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I) = \mathbf{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Exercice 2 On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $5M - M^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$

On factorise l'égalité obtenue par M : $5M - M^2 = 4I_3 \Leftrightarrow (5I - M)M = 4I \Leftrightarrow \frac{1}{4}(5I - M)M = I$

Ainsi, M est inversible et son inverse est $\mathbf{\frac{1}{4}(5I - M)}$.

Correction des exercices sur les matrices 3×3 non inversibles

Exercice 1 $AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Il est donc impossible que le produit de A par une matrice soit égal à la matrice identité, car le dernier coefficient de la diagonale de ce produit est forcément 0. Donc $\boldsymbol{A}$ **n'est pas inversible**.

Exercice 2 $N^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et N^3 est la matrice nulle : $N^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Par l'absurde, supposons que N est inversible. Il existerait alors une matrice N^{-1} telle que $NN^{-1} = I$.

On multiplie cette inégalité par N^2 à gauche : $N^2NN^{-1} = N^2I \Leftrightarrow N^3N^{-1} = N^2$.

Or $N^3 = 0$, donc $N^3N^{-1} = 0$ et ainsi $0 = N^2$. Contradiction : N^2 n'est pourtant pas la matrice nulle.

Donc N^{-1} n'existe pas et $\boldsymbol{N}$ **n'est pas inversible.**

Une matrice M telle qu'une de ses puissances M^n est nulle est appelée matrice nilpotente.

Les matrices nilpotentes sont toujours non-inversibles.

Exercice 3 $AB = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$. Ainsi $AB = AC$.

Par l'absurde, supposons que A est inversible. Il existerait alors une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I$.

On part de l'égalité $AB = AC$ et on multiplie par A^{-1} à gauche : $A^{-1}AB = A^{-1}AC \Leftrightarrow IB = IC \Leftrightarrow B = C$.

Contradiction : B n'est pourtant pas égale à C. Donc A^{-1} n'existe pas et $\boldsymbol{A}$ **n'est pas inversible**.

Une matrice A telle qu'il existe une matrice non-nulle M avec $AM = 0$ est appelée « diviseur de zéro ». Les diviseurs de zéro sont toujours non-inversibles. (Pour cet exercice, ce serait $B - C$ qui correspondrait à M)

charly-piva.fr